Budó Ágoston Fizikai Feladatmegoldó Verseny

2022. október 27. 14.00-17.00

Megoldókulcs – 9. évfolyam

Általános megjegyzések: A megoldókulcs elkészítésével segítséget kívánunk nyújtani a javításhoz. Igyekeztünk minél több részpontszámot megjelölni, hogy a javítás minél inkább egységes lehessen. Természetesen a megadottaktól eltérő helyes megoldásokat is el kell fogadni. Ilyen esetekben a megfelelő arányos pontozást a szaktanárokra bízzuk.

9. évfolyam, 1. feladat

9/1.

a)

Jelölje a fenyőfát az *1*-es index, a bükkfát a *2*-es index!

A sűrűségek tehát:

$$\rho_1 = 500\ \frac{kg}{m^3} = 0{,}5\ \frac{g}{cm^3} \qquad ill. \qquad \rho_2 = 700\ \frac{kg}{m^3} = 0{,}7\ \frac{g}{cm^3}$$

$\frac{kg}{m^3} \rightarrow \frac{g}{cm^3}$ **1 pont**

A tábla teljes térfogata kivésés előtt (valamint a kis kockák behelyezése után):

$$V_{össz} = (25 \cdot 7 \cdot 2)\ cm^3 = 350\ cm^3$$

2 pont

A felhasznált fenyőfa térfogata (a betűket alkotó 1 cm oldalélű kockák összeszámlálásából):

$$V_1 = 13\ cm^3 + 13\ cm^3 + 9\ cm^3 + 15\ cm^3 = 50\ cm^3$$

2 pont

A kivésés után maradt bükkfa alaptábla térfogata:

$$V_2 = V_{össz} - V_1 = 300\ cm^3$$

2 pont

A felhasznált fenyőfa tömege:

$$m_1 = \rho_1 \cdot V_1 = 25\ g$$

A felhasznált bükkfa tömege:

$$m_2 = \rho_2 \cdot V_2 = 210\ g$$

A tábla teljes tömege: **1+1 pont**

$$m_{össz} = m_1 + m_2 = 235\ g$$

A tábla átlagsűrűsége tehát:

$$\rho_{átlag} = \frac{m_{össz}}{V_{össz}} = \frac{235\ g}{350\ cm^3} = 0{,}67\ \frac{g}{cm^3}$$

2+1 pont (A +1 pont az eredményre csak mértékegység megadása esetén jár!)

Σ: 12 pont

b)

Ha a vízbe esett tábla egyensúlyban van, akkor a rá ható nehézségi erő nagysága megegyezik a felhajtóerő nagyságával:

$$m_{össz} \cdot g = \rho_{víz} \cdot V_{bemerülő} \cdot g$$

2 pont

Innen a bemerülő, majd a kiálló rész térfogata is kiszámítható:

$$V_{bemerülő} = \frac{m_{össz}}{\rho_{víz}} = 235\ cm^3$$

$$V_{ki} = V_{össz} - V_{bemerülő} = V_{össz} - \frac{m_{össz}}{\rho_{víz}} = 115\ cm^3$$

Ha a tábla felső lapja a vízfelszínnel egy magasságba kerül, akkor a madár lába még éppen nem lesz nedves. Ez azt jelenti, hogy legfeljebb – a kiálló rész víz alá kerülése miatt – V_{ki} térfogatú víz súlyával egyenlő mértékben növekedhet meg a felhajtóerő, vagyis maximálisan ilyen súlyú madár szállhat a táblára: **2 pont**

$$\Delta F_{felhajtó,max} = m_{sirály,max} \cdot g \ \rightarrow \ \rho_{víz} \cdot V_{ki} \cdot g = m_{sirály,max} \cdot g$$

azaz

$$m_{sirály,max} = \rho_{víz} \cdot V_{ki} = 115\ g$$

vagyis a 120 g tömegű kis sirály lába bizony nedves lesz… **4 pont**

Formálisabban: tegyük fel, hogy egy sirály rászállt a táblára, ami ekkor a felső lapjáig merült a vízbe, így még éppen száraz maradt a madár lába! Akkor az egyensúly feltétele **VAGY:**

$$\rho_{víz} \cdot V_{össz} \cdot g = \rho_{átlag} \cdot V_{össz} \cdot g + m_{sirály,max} \cdot g$$ **6 pont**

ahonnan

$$m_{sirály,max} = \left(\rho_{víz} - \rho_{átlag}\right) \cdot V_{ö} = 115\ g$$ **2 pont**

(Ha az átlagsűrűség két tizedesjegyre kerekített értékét használja a megoldó, akkor eredményül 115,5 grammot kap.)

Σ: 8 pont

Összpontszám: 20 pont

9. évfolyam, 2. feladat

9/2.

Folyásiránnyal szemben haladva a menetidő:

$$t_{fel} = \frac{S}{v_{cs} - v_{f,szélen}}$$ **4 pont**

ahol S a csónakkikötő és a horgászhely távolsága, v_{cs} a csónak állóvízhez viszonyított sebessége, $v_{f,szélen}$ a folyó vizének áramlási sebessége a parthoz közel.
Innen adódik, hogy

$$v_{f,szélen} = v_{cs} - \frac{S}{t_{fel}} = 12\ \frac{km}{h} - \frac{18\ km}{2\ h} = 3\ \frac{km}{h}$$ **4 pont**

sebességgel áramlik a víz a part közelében.
Folyásirányban haladva a menetidő:

$$t_{le} = \frac{S}{v_{cs} + v_{f,középen}}$$ **4 pont**

ahonnan kapjuk, hogy

$$v_{f,középen} = \frac{S}{t_{le}} - v_{cs} = \frac{18\ km}{1\ h} - 12\ \frac{km}{h} = 6\ \frac{km}{h}$$ **4 pont**

a Tisza vizének áramlási sebessége a folyó közepénél.

A jelenség értelmezése: a folyó szélén a vízmolekulák és a part között súrlódás lép fel, melynek hatására ott sokkal lassabban folyik a víz, s ez a vízréteg lelassítja a vele szomszédos vízréteg mozgását, ami szintén hat a mellette lévő rétegre, és így tovább, és így tovább. Ennek eredményeképpen a part mentén sokkal lassabb az áramlás, mint középen, azaz egy adott folyó esetében is van különbség az egyes részek áramlási sebessége között. **4 pont**

Összpontszám: 20 pont

9. évfolyam, 3. feladat

9/3.

A pici vízcseppek arról árulkodnak, hogy a jég hőmérséklete elérte az olvadáspontot, azaz negyedóra alatt $(\Delta T)_1 = 13$ °C-kal felmelegedett. **2 pont**

Az ehhez szükséges, a jég által felvett hőmennyiség

$$Q_1 = c_{jég} \cdot m \cdot (\Delta T)_1$$

ahol m a fél liter víz tömege, azaz

$$m = \rho_{víz} \cdot V = 0{,}5\ kg$$ **1 pont**

Számszerűen

$$Q_1 = c_{jég} \cdot m \cdot (\Delta T)_1 = 2100\ \frac{J}{kg \cdot °C} \cdot 0{,}5\ kg \cdot 13\ °C = 13650\ J$$ **2 pont**

Mivel feltételezzük, hogy mindvégig azonos körülmények között, egyenletesen melegszik a palackunk, kiszámíthatjuk a hőfelvétel állandó „intenzitását” (teljesítményét), ami számértékileg az 1 óra alatt felvehető hőmennyiséget adja meg:

$$P = \frac{Q}{\Delta t} = \frac{Q_1}{\frac{1}{4}h} = 54600\ \frac{J}{h}$$

(Nem szükséges formálisan jelölni a hőcsere teljesítményét.)
3 pont

A jég olvadása tehát 9:15-kor kezdődött meg. A teljes olvadáshoz a palackban lévő jégnek fel kell vennie

$$Q_2 = L_o \cdot m = 334000 \frac{J}{kg} \cdot 0{,}5\ kg = 167000\ J$$ **2 pont**

hőmennyiséget.

Ekkora hőfelvételhez szükséges időtartam:

$$\Delta t_2 = \frac{Q_2}{P} = \frac{167000\ J}{54600\ \frac{J}{h}} \approx 3\ h$$ **2 pont**

azaz 12:15-kor már csak 0 °C-os víz lesz a palackban. **1 pont**

Innentől ez a víz melegszik, az eddigiekkel megegyező „ütemben”.

Ahhoz, hogy $(\Delta T)_2 = 20$ °C-kal felmelegedjen a víz

$$Q_3 = c_{víz} \cdot m \cdot (\Delta T)_2 = 4200\ \frac{J}{kg \cdot °C} \cdot 0{,}5\ kg \cdot 20\ °C = 42000\ J$$ **2 pont**

hőmennyiséget kell felvennie, amit

$$\Delta t_3 = \frac{Q_3}{P} = \frac{42000\ J}{54600\ \frac{J}{h}} \approx 0{,}77\ h \approx 46\ min$$ **2 pont**

alatt kaphat meg a környezetétől.

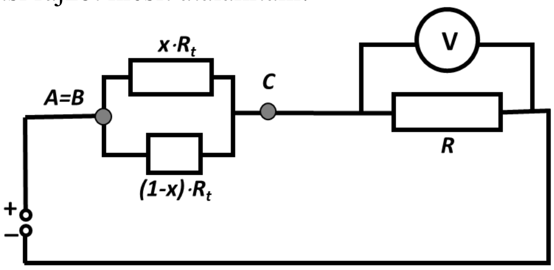
Így, mivel 12 óra 15 perc + 46 perc = 13 óra 1 perc, kaptuk, hogy 13:01-kor a palackban lévő víz hőmérséklete eléri a 20 °C-ot. Mondhatjuk, hogy közelítőleg 13 óráig ihatunk 20 °C-nál hűvösebb vizet. **3 pont**

Összpontszám: 20 pont

9/4.

a)

Célszerű a kapcsolási rajzot kicsit átalakítani:



A tolóellenállás két része egymással párhuzamosan van kötve, hiszen az *A* és a *B* végpont az áramforrás ugyanazon kapcsára csatlakozik, azaz azonos potenciálon van.

Rajz nélkül is jár a párhuzamos kapcsolás felismeréséért: 3 pont

Az is könnyen belátható ennek a ténynek birtokában, hogy amennyiben az egyik ág ellenállása zérusra csökken, rövidre záródik a másik ág, azaz a tolóellenállás eredő ellenállása zérus lesz. Ez akkor következhet be, amikor

$$x = 0 \qquad illetve \qquad x = 1$$

azaz, amikor a csúszka az *A*, vagy a *B* végpontban van. Ilyenkor a körben kialakuló áram erőssége maximális, ezért a voltmérő által mutatott

$$U_V = I \cdot R$$

feszültség is maximális.

2 pont

Nyilvánvaló, hogy a voltmérő akkor méri a legkisebb feszültséget, amikor a körben a legkisebb áramerősség alakul ki. Ez akkor következik be, amikor a tolóellenállás eredő ellenállása maximális lesz. Hogy ez a csúszka melyik helyzeténél következik be, többféleképpen belátható:

(1) Tudjuk, hogy párhuzamosan kapcsolt ellenállások eredőjének nagysága mindig kisebb, mint az összekötött ellenállások közül a legkisebbik értéke. Ebből következik, hogy ha a két párhuzamosan kötött ág valamelyikének ellenállása kisebb, mint a másik ágé, az eredő még ennél is kisebb értékű lesz. A legnagyobb eredő ellenállás akkor adódhat, ha a két ág ellenállása éppen egyenlő, azaz

$$x = \frac{1}{2}$$

(2) A két párhuzamosan kapcsolt ellenállás eredője

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{x \cdot R_t} + \frac{1}{(1-x) \cdot R_t}$$

alapján

$$R_e = \frac{x \cdot R_t \cdot (1-x) \cdot R_t}{x \cdot R_t + (1-x) \cdot R_t} = R_t \cdot x \cdot (1-x) = R_t \cdot (-x^2 + x)$$

A zárójelben egy olyan másodfokú kifejezés szerepel, melyet grafikusan ábrázolva egy lefelé nyíló parabolát kaphatnánk. A parabola zérushelyei könnyen kiolvashatók a szorzat-alakból:

$$x_1 = 0 \qquad illetve \qquad x_2 = 1$$

A maximumhely a két zérushely között „félúton” található, azaz

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1}{2}$$

A bemutatott megoldási lehetőségek bármelyikére, vagy ettől eltérő, de helyes indoklásra adható maximális pontszám: 5 pont

(3) A két párhuzamosan kapcsolt ellenállás eredőjét ismételten felírva kaphatjuk, hogy

$$R_e = \frac{x \cdot R_t \cdot (1-x) \cdot R_t}{x \cdot R_t + (1-x) \cdot R_t} = R_t \cdot x \cdot (1-x)$$

Keressük az

$$x \cdot (1-x)$$

kifejezésnek a maximumát! Két nemnegatív mennyiség szorzatáról lévén szó, kínálkozik a mértani és a számtani közép összevetésének lehetősége. Tudjuk, hogy

$$\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2} \qquad (a, b \geq 0)$$

azaz esetünkben

$$\sqrt{x \cdot (1-x)} \leq \frac{x + (1-x)}{2}$$

azaz

$$x \cdot (1-x) \leq \frac{1}{4}$$

tehát a kifejezés maximuma ¼, az eredő ellenállás maximuma pedig

$$R_e = R_t \cdot x \cdot (1-x) = \frac{R_t}{4}$$

lehet, de csak abban az esetben, ha

$$x = 1 - x$$

azaz

$$x = \frac{1}{2}$$

Σ:10 pont

b)

Amikor a tolóellenállás zérus eredőt szolgáltat ($R_e = 0$), azaz, amikor a voltmérő maximális feszültséget mutat, akkor éppen az az érték lesz az áramforrás feszültsége. Ugyanis

$$U = I \cdot R_e + I \cdot R = I \cdot R_e + U_V$$

ami a mondott feltételek mellett

$$U = I_{max} \cdot R = U_{V,max} = 10\ V$$

4 pont

Σ:4 pont

c)

Tekintsük azt a helyzetet, amikor a tolóellenállás csúszkája középállásban van, azaz a tolóellenállás eredő ellenállása maximális!

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot R_t} + \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot R_t} \ \rightarrow \ R_e = \frac{1}{4} \cdot R_t$$

2 pont

Ekkor a soros kapcsolás miatt

$$\frac{U - U_{min}}{\frac{1}{4} \cdot R_t} = \frac{U_{min}}{R}$$

3 pont

illetve

$$R_t = \frac{U_{max} - U_{min}}{U_{min}} \cdot 4 \cdot R = \frac{10V - 9{,}5V}{9{,}5V} \cdot 4 \cdot 1{,}9\ k\Omega = 0{,}4\ k\Omega = 400\ \Omega$$

1 pont

Σ:6 pont

Összpontszám: 20 pont

Budó Ágoston Fizikai Feladatmegoldó Verseny

2022. október 27. 14.00-17.00

Megoldókulcs – 10. évfolyam

Általános megjegyzések: A megoldókulcs elkészítésével segítséget kívánunk nyújtani a javításhoz. Igyekeztünk minél több részpontszámot megjelölni, hogy a javítás minél inkább egységes lehessen. Természetesen a megadottaktól eltérő helyes megoldásokat is el kell fogadni. Ilyen esetekben a megfelelő arányos pontozást a szaktanárokra bízzuk.

10. évfolyam, 1. feladat

10/1.

a)

Ha a sebesség km/h-ban kifejezett számértéke $|v|$, akkor a követési távolság

$$s = \frac{|v|}{2}\ m$$

Ennek a távolságnak a megtételéhez szükséges idő másodpercben:

$$t = \frac{s}{v_{m/s}} = \frac{\frac{|v|}{2}}{\frac{|v|}{3,6}} = 1,8\ s$$

4 pont

Σ: 4 pont

b)

Ha a hátul haladó a vészhelyzetet akkor érzékeli, amikor az elöl haladó másik autó elkezd fékezni (kigyullad a féklámpája), akkor ugyanabban a pontban kezd el fékezni, mint az elöl haladó. Ha a fékutak között nincs különbség, akkor éppen meg lehet állni. De ha az elöl haladó autós későn fékez, és beleütközik valamibe, vagy rövidebb a fékútja, mert jobb gumikat használ, akkor az ütközés már nem elkerülhető. (ld. a feladat c) részét). **2 pont**

Σ: 2 pont

c)

A két autó között a követési távolság méterben kifejezett értéke:

$$s_{fék} = v_{m/s} \cdot t = \frac{90}{3,6}\frac{m}{s} \cdot 2\ s = 50\ m$$

2 pont

A féktávolság a „késedelmi idő” (reakcióidő + fékkésedelem) alatt az eredeti sebességgel megtett út, és a fékezve/lassulva megtett fékút összege. A „késedelmi idő” alatt megtett út mindkét autó esetében ugyanakkora, hiszen azonos sebességgel haladtak, és feltételeztük, hogy egyforma a vezetők reakcióideje és a fékberendezések működése. Eszerint csak az a kérdés, hogy a két fékút (amit csúszva tesznek meg az autók) mennyiben tér el egymástól? **2 pont**

A fékutat kétféleképpen is kiszámíthatjuk:

(1) Dinamikai és kinematikai megfontolásokkal

A csúszó autó mozgásegyenletének komponensekre felírt alakja a vonatkoztatási rendszer x tengelyét a gyorsulás irányában, y tengelyét függőlegesen felfelé irányítva:

$$\left.\begin{aligned} F_s &= m \cdot a \\ N - m \cdot g &= 0 \end{aligned}\right\} F_s = \mu \cdot N \ \rightarrow\ \mu \cdot m \cdot g = m \cdot a$$

azaz az autó fékezési gyorsulásának nagysága

$$a = \mu \cdot g$$

4 pont

Ezzel a gyorsulással S úton fékeződik le a jármű $v_{m/s}$ sebességről zérusra. A felhasználható kinematikai összefüggések például a következők:

$$\left.\begin{aligned} S &= \frac{v_{m/s}+0}{2}\cdot \Delta t \\ a = \mu \cdot g &= \frac{\left|0 - v_{m/s}\right|}{\Delta t} \end{aligned}\right\} \rightarrow \ \mu \cdot g = \frac{v_{m/s}}{\frac{2\cdot S}{v_{m/s}}} = \frac{v_{m/s}^2}{2\cdot S}$$

azaz a fékút:

$$S = \frac{v_{m/s}^2}{2\cdot \mu \cdot g} = \frac{25^2}{20\cdot \mu} = \frac{31{,}25}{\mu}\ m$$

A két autó lefékeződéséhez szükséges út ezért **4 pont**

$$S_{elől} = \frac{31{,}25}{0{,}8}\ m = 39\ m$$

illetve

$$S_{hátul} = \frac{31{,}25}{0{,}6}\ m = 52\ m$$

Mivel a csúszás megkezdésekor az autók között 50 m volt a távolság, így az összeütközés elkerülhető, bár 13 méterrel közelebb kerül egymáshoz a két jármű.

(2) Munkatétellel

$$-F_s \cdot S = 0 - \frac{1}{2}\cdot m \cdot v_{m/s}^2 \ \rightarrow \ \mu \cdot m \cdot g \cdot S = \frac{1}{2}\cdot m \cdot v_{m/s}^2$$ **2 pont**

ahonnan

$$S = \frac{v_{m/s}^2}{2\cdot \mu \cdot g}$$

ugyanúgy, mint az előbb.

(Ugyanúgy maximum 10 pont, mint a másik megoldásnál.)

Σ: 14 pont

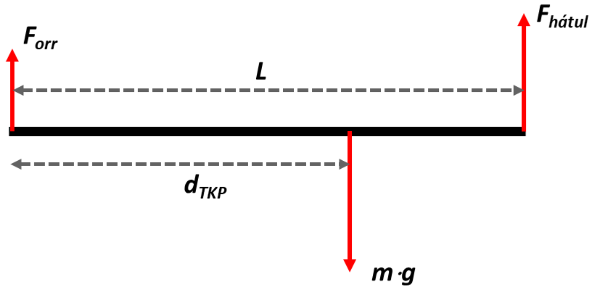
Összpontszám: 20 pont

10. évfolyam, 2. feladat

10/2.

a)

A csónak egyensúlyi feltételeinek felírásánál csak függőleges hatásvonalú erőkkel kell számolnunk (azonos magasságúak a terhet cipelők).



$$\left.\begin{aligned} F_{orr} + F_{hátul} &= m \cdot g \\ F_{hátul} \cdot L &= m \cdot g \cdot d_{TKP} \end{aligned}\right\}$$ **8 pont**

A forgatónyomatéki egyenletből

$$F_{hátul} = m \cdot g \cdot \frac{d_{TKP}}{L} = 540\ N = 54\ kg \cdot \mathrm{g}$$ **2 pont**

az erők eredőjére vonatkozó egyenletből pedig ennek felhasználásával

$$F_{orr} = m \cdot g - F_{hátul} = 900\ N - 540\ N = 360\ N = 36\ kg \cdot \mathrm{g}$$ **2 pont**

Láthatóan *a csónak végénél legalább három, a csónak orránál pedig két emberre* van szükség a csónak kockázatmentes vízre tételéhez. **2 pont**

Σ: 14 pont

b)

A megadott körülmények között a csónak mozgási energiája a teljes folyamatban nem változott, ezért a rajta végzett összes munka zérus. De mivel csak a nehézségi erő és az emberek végeztek a folyamatban munkát, és a nehézségi erő munkája zérus, hiszen ugyanolyan szintre került vissza a gravitációs mezőben a csónak, mint ahonnan eltávolították, így szükségszerűen az emberek összmunkája is zérus kell, hogy legyen. **4 pont**

Ez azonban nem jelenti azt, hogy az emberek energiája nem fogyott: a csónak felemelése érdekében befektetett energiát nem kapták vissza, amikor letették a terhet! Jogosan panaszkodnak fáradtságra, hiszen hő formájában energiaveszteséget szenvedtek. (Ezt bizonyára izzadságcseppek elpárologtatása kísérte…) **2 pont**

Σ: 6 pont

Összpontszám: 20 pont

10. évfolyam, 3. feladat

10/3.

a)

Az első kanál tejszínt beöntve, a termikus egyensúly kialakulása után:

$$c_{tej} \cdot m_{tej} \cdot \left(t_{\text{közös},1} - t_{tej}\right) = c_{kávé} \cdot m_{kávé} \cdot \left(t_{kávé} - t_{\text{közös},1}\right)$$

Innen

$$t_{\text{közös},1} = \frac{c_{tej} \cdot m_{tej} \cdot t_{tej} + c_{kávé} \cdot m_{kávé} \cdot t_{kávé}}{c_{tej} \cdot m_{tej} + c_{kávé} \cdot m_{kávé}}$$

Hasonlóan a második kanál tejszínt beöntve, a hőegyensúly kialakulása után:

$$c_{tej} \cdot m_{tej} \cdot \left(t_{\text{közös},2} - t_{tej}\right) =$$
$$= c_{kávé} \cdot m_{kávé} \cdot \left(t_{\text{közös},1} - t_{\text{közös},2}\right) + c_{tej} \cdot m_{tej} \cdot \left(t_{\text{közös},1} - t_{\text{közös},2}\right)$$

azaz

$$t_{\text{közös},2} = \frac{c_{tej} \cdot m_{tej} \cdot t_{tej} + \left(c_{kávé} \cdot m_{kávé} + c_{tej} \cdot m_{tej}\right) \cdot t_{\text{közös},1}}{2 \cdot c_{tej} \cdot m_{tej} + c_{kávé} \cdot m_{kávé}}$$

ahonnan $t_{\text{közös},1}$ beírásával kaphatjuk, hogy

$$t_{\text{közös},2} = \frac{2 \cdot c_{tej} \cdot m_{tej} \cdot t_{tej} + c_{kávé} \cdot m_{kávé} \cdot t_{kávé}}{2 \cdot c_{tej} \cdot m_{tej} + c_{kávé} \cdot m_{kávé}}$$

Erre a hőmérsékletre hűl le tehát a kávé ebben az eljárásban.

Ha egyszerre teszünk a kávéba két kanálnyi tejszínt, akkor a kialakuló közös hőmérséklet

$$c_{tej} \cdot 2 \cdot m_{tej} \cdot \left(t_{\text{közös}} - t_{tej}\right) = c_{kávé} \cdot m_{kávé} \cdot \left(t_{kávé} - t_{\text{közös}}\right)$$

illetve

$$2 \cdot c_{tej} \cdot m_{tej} \cdot \left(t_{\text{közös}} - t_{tej}\right) = c_{kávé} \cdot m_{kávé} \cdot \left(t_{kávé} - t_{\text{közös}}\right)$$

miatt

$$t_{\text{közös}} = \frac{2 \cdot c_{tej} \cdot m_{tej} \cdot t_{tej} + c_{kávé} \cdot m_{kávé} \cdot t_{kávé}}{2 \cdot c_{tej} \cdot m_{tej} + c_{kávé} \cdot m_{kávé}}$$

ugyanúgy, mint az imént.

Tehát Lottinak van igaza!

A feladat a) részének minden, helyes, részletesen indokolt, nem feltétlenül formálisan lejegyzett megoldására maximális pontszámot kell adni, a paraméteres számítások a b) részbe is kerülhetnek!

10 pont

Σ: 10 pont

b)

Mivel mindkét eljárásban ugyanannyi a végső hőmérséklet, a lehűlés mértéke is megegyezik:

$$\Delta t_{kávé} = t_{\text{közös}} - t_{kávé} = \frac{2 \cdot c_{tej} \cdot m_{tej} \cdot t_{tej} + c_{kávé} \cdot m_{kávé} \cdot t_{kávé}}{2 \cdot c_{tej} \cdot m_{tej} + c_{kávé} \cdot m_{kávé}} - t_{kávé}$$

$$\Delta t_{kávé} = \frac{2 \cdot c_{tej} \cdot m_{tej} \cdot t_{tej} + c_{kávé} \cdot m_{kávé} \cdot t_{kávé}}{2 \cdot c_{tej} \cdot m_{tej} + c_{kávé} \cdot m_{kávé}} -$$
$$- \frac{2 \cdot c_{tej} \cdot m_{tej} \cdot t_{kávé} + c_{kávé} \cdot m_{kávé} \cdot t_{kávé}}{2 \cdot c_{tej} \cdot m_{tej} + c_{kávé} \cdot m_{kávé}}$$

ahonnan

$$\Delta t_{kávé} = \frac{2 \cdot c_{tej} \cdot m_{tej} \cdot \left(t_{tej} - t_{kávé}\right)}{2 \cdot c_{tej} \cdot m_{tej} + c_{kávé} \cdot m_{kávé}}$$

(Mivel $t_{tej} < t_{kávé}$, ez egy negatív szám, de ha a versenyző a hőmérsékletváltozás abszolút értékét adja meg, azaz a

$$|\Delta t_{kávé}| = t_{kávé} - t_{\text{közös}} = t_{kávé} - \frac{2 \cdot c_{tej} \cdot m_{tej} \cdot t_{tej} + c_{kávé} \cdot m_{kávé} \cdot t_{kávé}}{2 \cdot c_{tej} \cdot m_{tej} + c_{kávé} \cdot m_{kávé}}$$

kifejezést, az is teljes értékű megoldásnak számít.)

10 pont

Σ: 10 pont

Összpontszám: 20 pont

10. évfolyam, 4. feladat

10/4.

a)

Az egy fékezés során töltésre fordított energia meghatározható a következőképpen:

$$E = \eta \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

ahol m és v az autó tömege, illetve sebessége, η = 40 %=0,4 az energia-átalakítás hatásfoka. Átváltva a sebességet alapmértékegységbe:

$$50\ \frac{km}{h} = 13{,}89\ \frac{m}{s}$$ **1 pont**

amivel

$$E = \eta \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = 0{,}4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1800 \cdot (13{,}89\,)^2 = 69{,}46\ kJ$$ **3 pont**

az egy fékezésből visszanyerhető energia.

A teljes akkumulátor-töltöttséghez szükséges fékezések száma ezért

$$N = \frac{E_{akku}}{E}$$

ahol $E_{akku} = 7{,}5\ kWh = 7{,}5 \cdot 3{,}6\ \cdot 10^6\ J = 27 \cdot 10^6\ J = 27000\ kJ.$ **1 pont**

Tehát

$$N = \frac{E_{akku}}{E} = \frac{27000\ kJ}{69{,}46\ kJ} = 388{,}7 \approx 389$$ **3 pont**

fékezésre van szükség a teljes feltöltéshez.

Mivel a fékezések között megtett átlagos távolság

$$d_{átlag} = \frac{10\ km}{35} = \frac{2}{7}\ km \approx 0{,}2857\ km$$ **2 pont**

így az N=389 fékezés

$$S = N \cdot d_{átlag} = 111\ km$$

hosszúságú távolság megtétele során valósulhat meg. Tehát 111 km hosszúságú, városban megtett út után töltődik fel az akkumulátor teljesen. **2 pont**

Σ: 12 pont

b)

A megadott s_{benzin} benzines hatótávolság alapján kiszámíthatjuk, hogy a benzintartály kiürüléséig hányszor tud teljesen feltöltődni az akkumulátor. A számolás eredményeképpen

$$n = \frac{s_{benzin}}{S} = \frac{500\ km}{111\ km} = 4{,}5$$ **2 pont**

adódik, azaz négy alkalommal teljesen, egy alkalommal félig töltődik fel az akkumulátor. Az ebből adódó hatótávolság-többlet

$$s_{többlet} = n \cdot 30\ km = 4{,}5 \cdot 30\ km = 135\ km$$ **2 pont**

Σ: 4 pont

c)

Az autó fogyasztása benzines üzemmódban:

$$z = \frac{35\ l}{500\ km} = 0{,}07\ \frac{l}{km}$$ **2 pont**

Tehát az elektromos működés által szolgáltatott többlet-hatótávolsághoz

$$V_{növekmény} = z \cdot s_{többlet} = 0{,}07\ \frac{l}{km} \cdot 135\ km = 9{,}45\ l$$

térfogatú benzint kellene többletként tárolnia az üzemanyagtartálynak.

Tehát az autó benzintartályának térfogatát 9,45 l-rel meg kellene növelni ahhoz, hogy tisztán benzines üzemmódban történő használat esetén ugyanakkora legyen a hatótávolsága, mint vegyes (hibrid) üzemmódban. **2 pont**

Σ: 4 pont

Összpontszám: 20 pont

Budó Ágoston Fizikai Feladatmegoldó Verseny

2022. október 27. 14.00-17.00

Megoldókulcs – 11. évfolyam

Általános megjegyzések: A megoldókulcs elkészítésével segítséget kívánunk nyújtani a javításhoz. Igyekeztünk minél több részpontszámot megjelölni, hogy a javítás minél inkább egységes lehessen. Természetesen a megadottaktól eltérő helyes megoldásokat is el kell fogadni. Ilyen esetekben a megfelelő arányos pontozást a szaktanárokra bízzuk.

11. évfolyam, 1. feladat

11/1.

a)

A labda *d*=7 cm-es átmérőjének a képen kirajzolódó „folt" függőleges mérete felel meg, tehát a valóságban 7 cm-es hossz a képen 35 pixel. Ebből kapható, hogy a labdát kirajzoló pixelek közül egy a valóságban

$$1\,pixel = \frac{7\,cm}{35} = 0{,}2\,cm$$ **3 pont**

távolságnak felel meg.

Az elmosódott kép vízszintes mérete *l*=75 pixel, ebből a labda átmérőjén túli kiterjedés egyezik meg a labda által a záridő alatt megtett út képével:

$$s_{labda,képen} = l - d = 75\,pixel - 35\,pixel = 40\,pixel$$ **5 pont**

ahonnan a valóságban megtett út

$$s_{labda,valóságban} = 40\,pixel \cdot 0{,}2\,cm = 8\,cm$$ **2 pont**

Tehát a labda 8 cm-t tesz meg a felvétel elkészítésének

$$t = \frac{1}{500}s = 0{,}002\,s$$ **2 pont**

hosszúságú időtartama alatt, így a sebessége:

$$v = \frac{s_{labda,valóságban}}{t} = \frac{8\,cm}{0{,}002\,s} = \frac{0{,}08\,m}{0{,}002\,s} = 40\,\frac{m}{s}$$ **2 pont**

Ez km/h-ban megadva:

$$v = 40\,\frac{m}{s} \cdot 3{,}6 = 144\,\frac{km}{h}$$ **1 pont**

(Nem kevés…) ***Σ: 15 pont***

b)

A labda sebessége az előző rész megoldása alapján 40 m/s. A játékosok távolsága *L*=18,4 m. Kihasználva, hogy állandó sebességű mozgásként kezelhető a probléma, kapjuk, hogy

$$t_{repülés} = \frac{L}{v} = \frac{18{,}4\,m}{40\,\frac{m}{s}} = 0{,}46\,s$$ **5 pont**

alatt érkezik a labda az ütőjátékoshoz. Tehát az ütőjátékosnak ennyi ideje – kevesebb, mint fél másodperce! – van reagálni a felé érkező labdára.

Σ: 5 pont

Összesen: 20 pont

11. évfolyam, 2. feladat

11/2.

a)

A *K* kapcsoló nyitott állásában a körben nem folyhat áram, ezért az áramforrás kapocsfeszültségének nagysága megegyezik az elektromotoros erőével:

$$U_{k,ny} = \varepsilon = 12\ V$$ **2 pont**

Mindkét kondenzátor az áramforrás kapcsaira csatlakozik (párhuzamosan vannak kötve egymással), így feszültségük megegyezik a kapocsfeszültséggel. **2 pont**

Ebből következően a rajtuk lévő töltés:

$$Q_1 = C_1 \cdot \varepsilon = 120\ \mu C = 1{,}2 \cdot 10^{-4}\ C$$

illetve

$$Q_2 = C_2 \cdot \varepsilon = 2 \cdot C_1 \cdot \varepsilon = 240\ \mu C = 2{,}4 \cdot 10^{-4}\ C$$ **4 pont**

Σ: 8 pont

b)

A *K* kapcsoló zárását követően a körben kialakuló áram erőssége:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + R_b} = \frac{12\ V}{50\Omega} = 0{,}24\ A$$ **3 pont**

A kondenzátorok az *R* ellenállással vannak párhuzamosan kötve, ezért feszültségük az *R*-re eső feszültséggel (illetve az áramforrás kapocsfeszültségével) megegyező:

$$U = I \cdot R = \frac{\varepsilon}{R + R_b} \cdot R = \varepsilon - \frac{\varepsilon}{R + R_b} \cdot R_b = U_{k,z} = 10{,}8\ V$$ **2 pont**

Az egyes kondenzátorok elektromos mezejében felhalmozott energia:

$$W_1 = \frac{1}{2} \cdot C_1 \cdot U^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10^{-6} F \cdot 10{,}8^2 V^2 = 5{,}832 \cdot 10^{-4}\ J$$

illetve

$$W_2 = \frac{1}{2} \cdot C_2 \cdot U^2 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 10^{-6} F \cdot 10{,}8^2 V^2 = 1{,}1664 \cdot 10^{-3}\ J$$ **4 pont**

Σ: 9 pont

c)

A belső ellenálláson másodpercenként fejlődő hőmennyiség:

$$Q_{Joule,R_b} = I^2 \cdot R_b \cdot \Delta t = 0{,}24^2 A^2 \cdot 5\Omega \cdot 1\ s = 0{,}288\ J$$ **3 pont**

Σ: 3 pont

Összesen: 20 pont

11. évfolyam, 3. feladat

11/3.

a)

A belső energia megváltozása a folyamatban:

$$\Delta E_b = \frac{f}{2} \cdot n \cdot R \cdot \Delta T = \frac{f}{2} \cdot p_2 \cdot V_2 - \frac{f}{2} \cdot p_1 \cdot V_1$$ **2 pont**

Mivel a gáz nyomása és térfogata egyenes arányban áll egymással:

$$p = K \cdot V$$ **2 pont**

ahol *K* egy konstans, ezért

$$E_b = \frac{f}{2} \cdot p \cdot V = \frac{f}{2} \cdot K \cdot V^2$$

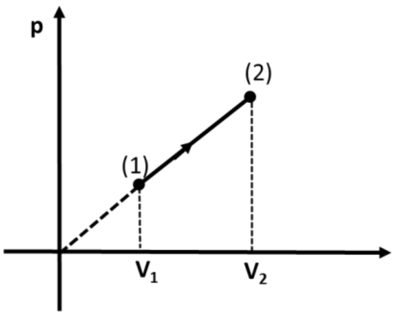
azaz

$$\Delta E_b = \frac{f}{2} \cdot K \cdot (V_2^2 - V_1^2)$$ **2 pont**

Mivel a gáz munkája megkapható a *p-V* állapotsíkon a folyamatot ábrázoló grafikon alatti terület számértékeként, így esetünkben az alábbi formulával határozható meg:

$$W_{gáz} = \frac{p_1 + p_2}{2} \cdot (V_2 - V_1) = \frac{K}{2} \cdot (V_2 + V_1) \cdot (V_2 - V_1) = \frac{K}{2} \cdot (V_2^2 - V_1^2) = \frac{\Delta E_b}{f}$$

4 pont



Felírva a folyamatra az I. főtételt:

$$Q = \Delta E_b + W_{gáz} = \Delta E_b + \frac{\Delta E_b}{f} = \frac{\Delta E_b \cdot (f+1)}{f} = \frac{90\,J \cdot 4}{3} = 120\,J$$

4 pont

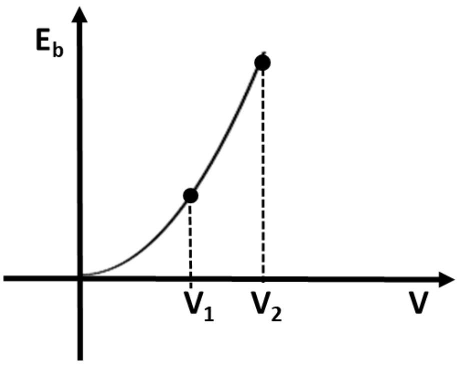
Σ: 14 pont

b)

A fenti gondolatmenetben adódott, hogy

$$E_b = \frac{f}{2} \cdot p \cdot V = \frac{f}{2} \cdot K \cdot V^2 = \frac{3 \cdot K}{2} \cdot V^2$$

azaz a gáz belső energiája egy ilyen folyamatban a térfogatának négyzetével egyenes arányban változik, azaz a két mennyiség függését kifejező grafikon egy parabola-ív: **2 pont**



4 pont

Σ: 6 pont

Összesen: 20 pont

11. évfolyam, 4. feladat

11/4.

a)

A kocsi egy fél rezgést végez a rugóval történő érintkezés időtartama alatt. A rezgésidő az ismert összefüggés alapján **3 pont**

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{M}{D}}$$

ahol a kocsi *M* tömege mellett *D* a rugóállandót jelöli. Innen

$$D = M \cdot \omega_1^2 = M \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} = \frac{4 \cdot \pi^2}{4 \cdot (\Delta t)^2} \cdot M = \frac{M \cdot \pi^2}{(\Delta t)^2} = \frac{2{,}5\ kg \cdot \pi^2}{0{,}25\ s^2} = 10 \cdot \pi^2$$

$$D \approx 98{,}7\ \frac{N}{m}$$ **2 pont**

Mivel a mechanikai energia megmarad, a maximális deformáció pillanatában a rugóban tárolt rugalmas energiának meg kell egyeznie a kezdeti magassági energiával (melyet a vízszintes szakaszon meghúzott nullszinthez viszonyítunk):

$$M \cdot g \cdot H = \frac{1}{2} \cdot D \cdot (\Delta l)_{max,1}^2$$ **3 pont**

Innen

$$(\Delta l)_{max,1} = \sqrt{\frac{2 \cdot M \cdot g \cdot H}{D}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2{,}5\ kg \cdot 9{,}81\ m/s^2 \cdot 0{,}15\ m}{98{,}7\ \ N/m}} = 0{,}273\ m$$

$$(\Delta l)_{max,1} \approx 27\ cm$$ **1 pont**

(Végezzünk átalakításokat, hogy egy másik megoldási lehetőségre rávilágítsunk:

$$M \cdot g \cdot H = \frac{1}{2} \cdot M \cdot \omega_1^2 \cdot (\Delta l)_{max,1}^2$$

ahol ω_1 a „félrezgés” körfrekvenciája. Innen

$$2 \cdot g \cdot H = \omega_1^2 \cdot (\Delta l)_{max,1}^2$$

illetve

$$\sqrt{2 \cdot g \cdot H} = \omega_1 \cdot (\Delta l)_{max,1}$$

ami jól mutatja, hogy úgy is gondolkodhattunk volna, hogy a kialakuló rezgés során a rugóval való érintkezésbe lépéskor a kocsi – lejtőről történő lefutása során nyert – sebessége éppen a sebességamplitúdó, azaz

$$v_{max} = A \cdot \omega$$

ahol az amplitúdó éppen a rugó maximális összenyomódása.) ***Σ:9 pont***

b)

A rugóval érintkező megterhelt kiskocsi rezgése során a gyorsulás a szélső helyzetben maximális, amikor a rugó legnagyobb mértékben össze van nyomódva:

$$a_{max,2} = A_2 \cdot \omega_2^2 = (\Delta l)_{max,2} \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T_2^2} = (\Delta l)_{max,2} \cdot \frac{D}{m + M}$$ **3 pont**

Ha ezt a gyorsulást a kockára ható tapadási erő biztosítani tudja, akkor nem csúszik meg a kocsi felületén. Tehát, amennyiben **3 pont**

$$F_{t,max} \geq m \cdot a_{max,2} \ \rightarrow \ \mu_0 \cdot m \cdot g \geq m \cdot a_{max,2}$$

azaz, ha

$$\mu_0 \cdot g \geq a_{max,2}$$

akkor nem csúszik meg a kocka.

Ezért a

$$(\Delta l)_{max,2} \cdot \frac{D}{m + M} \leq \mu_0 \cdot g$$ **1 pont**

feltételnek teljesülnie kell.

A rugó maximális összenyomódását azonban a megterhelt kocsi elengedésének magassága meghatározza:

$$(m+M)\cdot g\cdot H_2=\frac{1}{2}\cdot D\cdot(\Delta l)^2_{max,2}$$

azaz

$$(\Delta l)_{max,2}=\sqrt{\frac{2\cdot(m+M)\cdot g\cdot H_2}{D}}$$

2 pont

Beírva a megcsúszásra szabott feltételi egyenletbe:

$$\frac{D}{m+M}\cdot\sqrt{\frac{2\cdot(m+M)\cdot g\cdot H_2}{D}}\le\mu_0\cdot g$$

$$\sqrt{\frac{2\cdot D\cdot g\cdot H_2}{m+M}}\le\mu_0\cdot g$$

ahonnan

$$H_2\le\frac{\mu_0^2\cdot g\cdot(m+M)}{2\cdot D}$$

illetve a maximálisan megengedhető magasság, ahonnan elengedett kocsi esetében a kocka még nem csúszik meg a kocsi felületén a rugóval történő ütközés alatt:

$$H_{2,max}=\frac{\mu_0^2\cdot g\cdot(m+M)}{2\cdot D}=\frac{0,4^2\cdot 3\,kg\cdot 9{,}81\,m/s^2}{2\cdot 98{,}7\;N/m}=2{,}385\;cm\approx 2{,}4\;cm$$

2 pont

Σ:11 pont

Összesen: 20 pont

Budó Ágoston Fizikai Feladatmegoldó Verseny

2022. október 27. 14.00-17.00

Megoldókulcs – 12. évfolyam

Általános megjegyzések: A megoldókulcs elkészítésével segítséget kívánunk nyújtani a javításhoz. Igyekeztünk minél több részpontszámot megjelölni, hogy a javítás minél inkább egységes lehessen. Természetesen a megadottaktól eltérő helyes megoldásokat is el kell fogadni. Ilyen esetekben a megfelelő arányos pontozást a szaktanárokra bízzuk.

12. évfolyam, 1. feladat

12/1.

Először tisztázzuk, miért szerepel a „tömeg mérése” kifejezés idézőjelben a feladat szövegében. A kétkarú mérleg forgatónyomatékokat hasonlít össze, egyenlő karú mérleget feltételezve egyensúly esetén a mérlegkarok végeire ható erők egyforma nagyságúak.
Ha a mérendő teher és a mérősúlyok is levegőben vannak, továbbá a levegő felhajtóerejétől eltekintünk, akkor a mérleg egyensúlyi helyzete a mérendő test és a mérősúlyok súlyának, illetve az azokra ható nehézségi erő nagyságának egyenlőségét jelzi. Homogén gravitációs mezőben ez még azt is jelenti, hogy a mérendő test és a mérősúlyok tömege megegyezik.
Ha a mérendő testre a nehézségi erőn kívül a felhajtóerő is hat, akkor a mérlegkart a (levegőben mérhető) súlyánál kisebb erővel húzza, így a mérleg egyensúlyi helyzete arról árulkodik, hogy a mérősúlyok súlya és a mérendő test „felhajtóerővel csökkentett súlya” egyenlő egymással. Ebből természetesen még homogén gravitációs mezőben sem következik, hogy a mérősúlyok leolvasható tömege megegyezne a mérendő test tömegével: ilyen szituációban a kétkarú mérleggel nem a vizsgált test tömegét mérjük!
A feladat szövegében a „tömeg” kifejezés a két mérlegelésben, ugyanazon rög egyensúlyban tartásához felhasznált mérősúlyok össztömegére értelmezhető, az aranyrög tömege természetesen nem változhat attól, hogy vízbe merítik.

(Nem elvárás az alábbiakban ismertetett paraméteres megoldás!)

A feladat megoldásához írjuk fel a levegőben, illetve vízben egyensúlyban lévő rögre a feltételi egyenleteket!

Levegőben a felfüggesztés által a rögre kifejtett F_1 erőre:

$$F_1 = F_{neh} \rightarrow F_1 = m_{rög} \cdot g$$ **1 pont**

Vízben a felfüggesztés által a rögre kifejtett F_2 erőre:

$$F_2 = F_{neh} - F_{fel} \rightarrow F_2 = m_{rög} \cdot g - \rho_{víz} \cdot V_{rög} \cdot g$$ **2 pont**

Amekkora erőt a felfüggesztés a rögre kifejt, ugyanakkora erővel hat a mérlegkarra is. (A fonál elhanyagolható tömegű.) Egyenlő karú mérleget feltételezve a másik serpenyőbe kerülő mérősúlyok súlya pontosan egyenlő kell, hogy legyen ezzel az erővel. Ebből következik, hogy

$$\left.\begin{array}{c} F_1 = m_{mérősúlyok,levegő} \cdot g \\ F_2 = m_{mérősúlyok,víz} \cdot g \end{array}\right\}$$

azaz

$$\left.\begin{array}{c} m_{rög} \cdot g = m_{mérősúlyok,levegő} \cdot g \\ m_{rög} \cdot g - \rho_{víz} \cdot V_{rög} \cdot g = m_{mérősúlyok,víz} \cdot g \end{array}\right\}$$

ahonnan egyrészt

$$m_{rög} = m_{mérősúlyok,levegő} = 1574{,}5\ g$$ **1 pont**

másrészt

$$m_{mérősúlyok,levegő} \cdot g - \rho_{víz} \cdot V_{rög} \cdot g = m_{mérősúlyok,víz} \cdot g$$

miatt

$$V_{rög} = \frac{m_{mérősúlyok,levegő} - m_{mérősúlyok,víz}}{\rho_{víz}} = 529{,}3\ cm^3$$

Ki tudjuk fejezni a rög átlagsűrűségét is:

$$\rho_{rög,átlag} = \frac{m_{rög}}{V_{rög}} = \frac{m_{mérősúlyok,levegő}}{\frac{m_{mérősúlyok,levegő} - m_{mérősúlyok,víz}}{\rho_{víz}}}$$ **2 pont**

$$\rho_{rög,átlag} = \frac{m_{mérősúlyok,levegő}}{m_{mérősúlyok,levegő} - m_{mérősúlyok,víz}} \cdot \rho_{víz} \approx 2{,}975\ \frac{g}{cm^3}$$ **2 pont**

(A továbbiakban a „mérősúlyok, levegő” és „mérősúlyok, víz” indexeket rövidítve írjuk.)
A tömeg és a térfogat is additív mennyiség lévén

$$m_{rög} = m_{arany} + m_{kvarc}$$ **1 pont**

illetve

$$V_{rög} = V_{arany} + V_{kvarc}$$ **1 pont**

ezért az átlagsűrűség a következő alakban is felírható:

$$\rho_{rög,átlag} = \frac{m_{rög}}{V_{rög}} = \frac{m_{ms,l}}{\frac{m_{arany}}{\rho_{arany}} + \frac{m_{kvarc}}{\rho_{kvarc}}} = \frac{m_{ms,l}}{\frac{m_{arany}}{\rho_{arany}} + \frac{m_{ms,l} - m_{arany}}{\rho_{kvarc}}}$$

illetve

$$\rho_{rög,átlag} = \frac{m_{ms,l} \cdot \rho_{arany} \cdot \rho_{kvarc}}{m_{ms,l} \cdot \rho_{arany} - m_{arany} \cdot (\rho_{arany} - \rho_{kvarc})}$$ **2 pont**

Az átlagsűrűség kétféle kifejezését egyenlővé tehetjük:

$$\frac{m_{ms,l} \cdot \rho_{víz}}{m_{ms,l} - m_{ms,v}} = \frac{m_{ms,l} \cdot \rho_{arany} \cdot \rho_{kvarc}}{m_{ms,l} \cdot \rho_{arany} - m_{arany} \cdot (\rho_{arany} - \rho_{kvarc})}$$

azaz

$$\rho_{víz} \cdot \rho_{arany} \cdot m_{ms,l} - m_{arany} \cdot \rho_{víz} \cdot (\rho_{arany} - \rho_{kvarc}) = \rho_{arany} \cdot \rho_{kvarc} \cdot (m_{ms,l} - m_{ms,v})$$

Innen az arany tömege kifejezhető:

$$m_{arany} = \frac{\rho_{víz} \cdot \rho_{arany} \cdot m_{ms,l} - \rho_{arany} \cdot \rho_{kvarc} \cdot (m_{ms,l} - m_{ms,v})}{\rho_{víz} \cdot (\rho_{arany} - \rho_{kvarc})}$$

illetve

$$m_{arany} = \frac{m_{ms,l} - \frac{\rho_{kvarc}}{\rho_{víz}} \cdot (m_{ms,l} - m_{ms,v})}{1 - \frac{\rho_{kvarc}}{\rho_{arany}}}$$

vagy

$$m_{arany} = \frac{m_{ms,l} \cdot \left(1 - \frac{\rho_{kvarc}}{\rho_{víz}}\right) + \frac{\rho_{kvarc}}{\rho_{víz}} \cdot m_{ms,v}}{1 - \frac{\rho_{kvarc}}{\rho_{arany}}}$$ **6 pont**

Látható, hogy az okostelefonos alkalmazásban valami ezekhez hasonló kifejezés szerepelhet, amelybe – az ismert sűrűségértékeken kívül – elegendő bevinni a „mért tömegértékeket”, és adódik az eredmény.
Esetünkben az adatok behelyettesítésével kaphatjuk, hogy

$$m_{arany} = \frac{1574{,}5\ g \cdot \left(1 - \frac{2{,}66}{1}\right) + \frac{2{,}66}{1} \cdot 1045{,}2\ g}{1 - \frac{2{,}66}{19{,}30}} = \frac{166{,}562\ g}{0{,}8622} = 193{,}2\ g$$ **2 pont**

tömegű aranyat tartalmaz a rög.

Összesen: 20 pont

12. évfolyam, 2. feladat

12/2.

A nagyobb baktérium hasonló a kisebbhez, a hasonlóság arányszáma

$$\lambda = \frac{R_{nagy}}{R_{kicsi}} = \frac{d_{nagy}}{d_{kicsi}} = 1{,}1$$ **2 pont**

Tudjuk – a hasonlóságról tanultakat felidézve –, hogy a hosszméretek λ-szoros növekedése a felszín λ^2-szeres változását eredményezi. **2 pont**

Mivel egységnyi felületen ugyanannyi molekuláris motor található, adódik, hogy a nagyobb baktérium felületén lévő molekuláris motorok száma a kisebb baktérium motorszámánál a felszínek arányában nagyobb:

$$n_{motor,nagy} = \lambda^2 \cdot n_{motor,kicsi}$$ **2 pont**

Mivel a motorok azonos teljesítményűek, következik, hogy a mozgatásra fordítható összteljesítmények viszonya is ilyen arányban áll egymással:

$$P_{nagy} = \lambda^2 \cdot P_{kicsi}$$ **2 pont**

Amikor a baktérium v sebességgel egyenes vonalú pályán egyenletesen halad, a flagellák által kifejtett F „tolóerő” egyenlő nagyságú, de ellentétes irányú a közegellenállási erővel: **2 pont**

$$F = F_{közeg}$$

azaz

$$F = K \cdot d \cdot v$$

A P teljesítmény állandósága megszabja, hogy adott sebesség mellett mekkora tolóerőt képesek a csillók kifejteni: **1 pont**

$$P = F \cdot v$$

A felírt egyensúlyi feltételbe beírva a tolóerő teljesítménnyel történő kifejezését: **2 pont**

$$\frac{P}{v} = K \cdot d \cdot v$$

azaz

$$v = \sqrt{\frac{P}{K \cdot d}}$$ **4 pont**

Ebből következik, hogy

$$v_{nagy} = \sqrt{\frac{P_{nagy}}{K \cdot d_{nagy}}} = \sqrt{\frac{\lambda^2 \cdot P_{kicsi}}{K \cdot \lambda \cdot d_{kicsi}}} = \sqrt{\lambda \cdot \frac{P_{kicsi}}{K \cdot d_{kicsi}}}$$

azaz

$$v_{nagy} = \sqrt{\lambda} \cdot \sqrt{\frac{P_{kicsi}}{K \cdot d_{kicsi}}} = \sqrt{\lambda} \cdot v_{kicsi}$$

Esetünkben

$$v_{nagy} = \sqrt{1{,}1} \cdot v_{kicsi} \approx 1{,}05 \cdot v_{kicsi}$$ **3 pont**

Ez azt jelenti, hogy a 10 %-kal nagyobb hosszméretekkel rendelkező baktérium a kisebb méretű baktérium sebességénél körülbelül 5 %-kal nagyobb sebesség elérésére képes.

Összesen: 20 pont

12. évfolyam, 3. feladat

12/3.

a)

Egyensúlyi állapot esetén a fűtésből egy adott időtartam alatt nyert energiának meg kell egyeznie az ugyanezen időtartam alatt a falakon át távozó hőmennyiséggel. **(Ha csak az egyenletek felírásából derül ki, akkor is megadható.)** **1 pont**

A fűtéssel például 1 óra alatt nyerhető energia:

$$E_{fa} = H_é \cdot \rho \cdot V$$

ahol $H_é$ és ρ a fa fűtőértéke, illetve sűrűsége, V az 1 óra alatt eltüzelt fa térfogata. Innen

$$E_{fa} = H_é \cdot \rho \cdot V = 15\ \frac{MJ}{kg} \cdot 600 \frac{kg}{m^3} \cdot 0{,}001\ m^3 = 9\ MJ$$ **2 pont**

A környezetbe távozó hőmennyiség a határoló felületen keresztül 1 óra alatt:

$$Q = \lambda_{fa} \cdot \frac{A \cdot (T_{benn} - T_{kinn})}{d_{fa}} \cdot \Delta t$$ **1 pont**

ahol λ_{fa} és d_{fa} a kunyhót alkotó falemezek hővezetési együtthatója, illetve a lemezek vastagsága, A a falemezek összfelülete, Δt = 1 óra = 3600 s.

Mivel

$$E_{fa} = Q$$

$$H_é \cdot \rho \cdot V = \lambda_{fa} \cdot \frac{A \cdot \left(T_{benn,1} - T_{kinn}\right)}{d_{fa}} \cdot \Delta t$$ **3 pont**

ahonnan

$$T_{benn,1} - T_{kinn} = \frac{H_é \cdot \rho \cdot V \cdot d_{fa}}{\lambda_{fa} \cdot A \cdot \Delta t} = \frac{9 \cdot 10^6\ J \cdot 0{,}01\ m}{0{,}15\ \frac{J}{m \cdot K \cdot s} \cdot 47 m^2 \cdot 3600 s} = 3{,}55\ K(°C)$$ **1 pont**

A szoba hőmérséklete így maximum

$$T_{benn,1} = T_{kinn} + 3{,}55\ °C = -20°C + 3{,}55\ °C = -16{,}45\ °C$$

lehet.

Tehát a faház nem fűthető be 20°C-ra. **1 pont**

Σ:9 pont

b)

A feladat előző részéhez képest csak a környezetbe időegység alatt távozó hőmennyiség változik, ezért

$$T_{benn,2} - T_{kinn} = \frac{H_é \cdot \rho \cdot V \cdot d_{poli}}{\lambda_{poli} \cdot A \cdot \Delta t} = \frac{9 \cdot 10^6\ J \cdot 0{,}05\ m}{0{,}05\ \frac{J}{m \cdot K \cdot s} \cdot 47 m^2 \cdot 3600 s} = 53{,}2\ K(°C)$$ **2 pont**

azaz a szobában elérhető hőmérséklet maximum

$$T_{benn,2} = T_{kinn} + 53{,}2\ \ °C = 33{,}2\ °C$$ **1 pont**

lehet.

A szigeteléssel bőven biztosítható a 20 °C-os beltéri hőmérséklet.

Σ:3 pont

c)

Hőszivattyú esetén a fenti energiamérleg „hőtermelési” oldala változik, és szintén a hőmérséklet-különbségtől függő lesz. Ugyanis a hőszivattyú által 1 óra alatt szolgáltatható energia

$$E_{szivattyú} = \varepsilon \cdot P_{elektromos} \cdot \Delta t$$

ahol

$$\varepsilon = COP = \frac{T_{benn,3}}{T_{benn,3} - T_{kinn}}$$ **1 pont**

Az egyensúlyi állapotot leíró energiamérleget felírva (időegység alatt ugyanannyi energiát szív be a hőszivattyú, mint amennyi a határfalakon keresztül távozik):

$$E_{szivattyú} = Q$$

$$\frac{T_{benn,3}}{T_{benn,3} - T_{\mathrm{kinn}}} \cdot P_{elektromos} \cdot \Delta t = \lambda_{poli} \cdot \frac{A \cdot (T_{benn,3} - T_{kinn})}{d_{poli}} \cdot \Delta t$$

$$\frac{T_{benn,3}}{T_{benn,3} - T_{\mathrm{kinn}}} \cdot P_{elektromos} = \lambda_{poli} \cdot \frac{A \cdot (T_{benn,3} - T_{kinn})}{d_{poli}}$$

4 pont

$$\frac{d_{poli} \cdot P_{elektromos}}{\lambda_{poli} \cdot A} \cdot T_{benn,3} = (T_{benn,3} - T_{kinn})^2$$

$$\frac{d_{poli} \cdot P_{elektromos}}{\lambda_{poli} \cdot A} \cdot T_{benn,3} = T_{benn,3}^2 - 2 \cdot T_{kinn} \cdot T_{benn,3} + T_{kinn}^2$$

ahonnan

$$T_{benn,3}^2 - \left(2 \cdot T_{kinn} + \frac{d_{poli} \cdot P_{elektromos}}{\lambda_{poli} \cdot A}\right) \cdot T_{benn,3} + T_{kinn}^2 = 0$$

$$T_{benn,3}^2 - \left(2 \cdot 253\ K + \frac{0{,}05\ m \cdot 600\ W}{0{,}05 \frac{J}{m \cdot K \cdot s} \cdot 47\ m^2}\right) \cdot T_{benn,3} + (253\ K)^2 = 0$$

$$T_{benn,3}^2 - 518{,}766 \cdot T_{benn,3} + 64009 = 0$$

2 pont

A másodfokú egyenlet megoldóképletét alkalmazva:

$$T_{benn,3} = \frac{518{,}766 \pm \sqrt{2{,}6912 \cdot 10^5 - 4 \cdot 64009}}{2} = \frac{518{,}766 \pm 114{,}377}{2}$$

A két megoldás 316,57 K, illetve 202,19 K.

A fizikai szempontból számunkra elfogadható megoldás az első érték, azaz a hőszivattyúval elérhető maximális beltéri hőmérséklet

$$T_{benn,3} = 316{,}57\ K \approx 43{,}5\ ℃$$

1 pont

Σ:8 pont

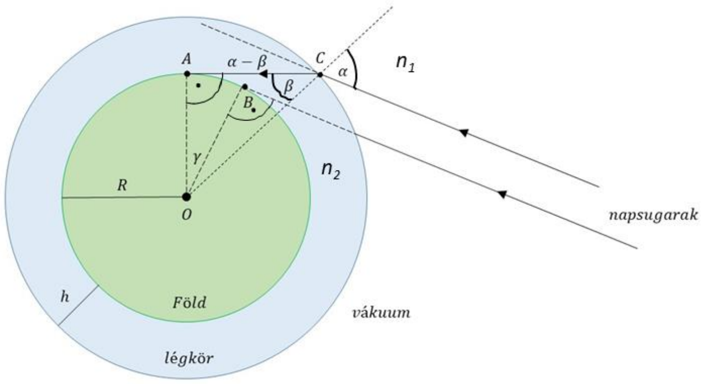
Összesen: 20 pont

12/4.

In memoriam Dr. Gyémánt Iván, 1944-2022

(A feladatot Gyémánt Iván – Molnár Miklóssal közösen írt – „Hússzor hat – Fizikai feladatsorozatok és megoldásaik felvételizőknek” *című művéből választottuk.)*

Jelölések: $n_2 = 1{,}0003$, $n_1 = 1$, $R = 6370$ km, $h = 10$ km, $T = 24$ h $= 86400$ s



(Az ábra a jobb áttekinthetőség kedvéért aránytalan.)

Ábrakészítés maximum (helyes elemekre bontható): 4 pont

Napkeltének nevezzük azt a napi rendszerességgel lejátszódó jelenséget, amikor a Föld forgása következtében a Nap megjelenik a horizonton (A pont).

2 pont

Ekkor még csak a fénytörés miatt látjuk a horizonton a Napot, valójában még a horizont alatt tartózkodik. Ha nem lenne fénytörés, akkor ugyanebben az időpontban Föld egy másik helyén, a B pontban lenne napfelkelte.

2 pont

Az „időnyereség” az ábrán γ-val jelölt szöggel arányos:

$$\Delta t = \frac{\gamma}{360°} \cdot T$$

2 pont

Az ábra alapján, az OAC derékszögű háromszöget tekintve:

$$\sin\beta = \frac{R}{R+h} = \frac{6370\text{ km}}{6370\text{ km} + 10\text{ km}} = 0{,}998433$$

$$\beta = 86{,}79°$$

2 pont

A Snellius-Descartes törvény alapján:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n_{21} = \frac{n_2}{n_1} \rightarrow sin\alpha = \frac{n_2}{n_1} \cdot \sin\beta \rightarrow sin\alpha = 0{,}998733 \;\rightarrow\; \alpha = 87{,}11°$$

3 pont

Mivel a bejövő napsugarak merőlegesek az OB egyenesre, míg a megtört napsugarak az OA egyenesre, így a γ (hegyes)szög merőleges szárú az $\alpha - \beta$ (hegyes)szöggel, ezért megegyezik vele:

$$\gamma = \alpha - \beta = 87{,}11° - 86{,}79° = 0{,}32°$$

2 pont

Tehát:

$$\Delta \boldsymbol{t} = \frac{\gamma}{360°} \cdot T = \frac{0{,}32°}{360°} \cdot 86400\text{ s} = 76{,}8\text{ s}$$

2 pont

A Nap a légkör vákuumétól kissé eltérő törésmutatója miatt $76{,}8\,s$-mal kel fel korábban, és ugyanennyi idővel később nyugszik le.

1 pont

Összesen: 20 pont