Budó Ágoston Fizikai Feladatmegoldó Verseny

2021. november 18. 14.00-17.00

<u>Megoldókulcs</u>

Általános megjegyzések: A megoldókulcs elkészítésével segítséget kívánunk nyújtani a javításhoz. Igyekeztünk minél több részpontszámot megjelölni, hogy a javítás minél inkább egységes lehessen. Természetesen a megadottaktól eltérő helyes megoldásokat is el kell fogadni. Ilyen esetekben a megfelelő arányos pontozást a szaktanárokra bízzuk.

9. évfolyam, 1. feladat

a)

A legegyszerűbb megoldáshoz tulajdonképpen csak azt kell meghatároznunk, hogy a segítőkész síelő hol van a bot elejtésének pillanatában, és a felvonó egyenletes sebességével mennyi idő alatt teszi meg onnan számítva a felső fordulóig tartó távot.
A segítőkész síelő Peti mögött az 5. csákányon halad felfelé, ezért Petitől mért távolsága

$$d = 5 \cdot 8\ m = 40\ m.$$ **2 pont**

Mivel a felvonó felső pontja Petitől 500 m-re van, a segítőkész síelőnek a felső fordulóig megteendő útja:

$$s = 500\ m + 40\ m = 540\ m.$$ **2 pont**

A síelő sebessége a felvonó sebességével egyenlő:

$$v = 2\ \frac{m}{s}$$ **2 pont**

Az eltelt idő, amíg a segítőkész síelő felér a felvonó felső állomásánál várakozó Petihez:

$$t_a = \frac{s}{v} = \frac{540\ m}{2\ \frac{m}{s}} = 270\ s = 4{,}5\ perc$$

Az elejtés pillanatától mérve ennyi idő telik el addig, míg visszakapja Peti a botját. **4 pont**

\- - - - - - - - - - -

Természetesen más megoldások is teljes értékűek lehetnek. Elképzelhető pl. a következő gondolatmenet:
A bot elejtésének pillanatában a segítőkész síelő Peti mögött az 5. csákányon halad felfelé, ezért Petitől mért távolsága

$$d = 5 \cdot 8\ m = 40\ m,$$ **2 pont**

a felvonó felső fordulójától

$$s_1 = 500\ m + 40\ m = 540\ m$$

távolságra van, és a felvonó

$$v = 2\ \frac{m}{s}$$

nagyságú sebességével halad felfelé. **2 pont**

Az elejtett bot

$$v_{bot} = 0{,}5\ \frac{m}{s}$$

nagyságú sebességgel csúszik lefelé, ezért a bot és a segítőkész síelő találkozásáig eltelt idő

$$v \cdot t_1 + v_{bot} \cdot t_1 = d\ \rightarrow\ t_1 = \frac{d}{v + v_{bot}} = \frac{40\ m}{2{,}5\ \frac{m}{s}} = 16\ s.$$ **2 pont**

Ezalatt a segítőkész síelő a felvonó sebességével felfelé haladva megtett

$$s_2 = v \cdot t_1 = 32\ m$$

távolságot, vagyis a felvonó felső fordulójától ebben a pillanatban **2 pont**

$$s_3 = s_1 - s_2 = 540\ m - 32\ m = 508\ m$$
távolságban van.
Pillanatszerűen felkapja a botot, és tovább halad a felvonó sebességével. A hátralévő s_3 távolság megtételéhez

$$t_2 = \frac{s_3}{v} = \frac{508\ m}{2\ \frac{m}{s}} = 254\ s$$

időre van szüksége, ennek leteltével tudja átadni Petinek a botot. **1 pont**

Azaz, a bot elejtésétől addig, míg tulajdonosa visszakapta a botot, eltelt összesen:

$$t_a = t_1 + t_2 = \frac{d}{v + v_{bot}} + \frac{s_3}{v} = 254s + 16\ s = 270\ s = 4{,}5\ perc$$

1 pont

a) rész összesen: 10 pont

b)

Először számoljuk ki, hogy Peti mennyi idő alatt ér fel a felvonóval:

$$t_P = \frac{s_P}{v} = \frac{500\ m}{2\ \frac{m}{s}} = 250\ s$$

1 pont

Ez idő alatt a bot

$$s_{bot} = v_{bot} \cdot t_P = 0{,}5\ \frac{m}{s} \cdot 250\ s = 125\ m\text{-rel}$$

csúszik lejjebb. **1 pont**

Peti és a bot távolsága tehát

$$l = 500\ m + 125\ m = 625\ m$$

lesz, amikor Peti felér a felvonóval, és elindul a lejtőn. **1 pont**

Míg Peti utoléri a botot, eltelik $t_{utolérés}$ idő, melyre vonatkozóan teljesül a következő egyenlet:

$$v_{Peti} \cdot t_{utolérés} = v_{bot} \cdot t_{utolérés} + l$$

azaz

$$v_{Peti} \cdot t_{utolérés} - v_{bot} \cdot t_{utolérés} = l$$

illetve

$$t_{utolérés} \cdot (v_{Peti} - v_{bot}) = l.$$

(Láthatóan úgy is gondolkodhatunk, hogy a bot és Peti között kezdetben meglévő távolságot a relatív sebességükkel kell megtenni az utoléréshez.) **4 pont**

Innen

$$t_{utolérés} = \frac{l}{v_{Peti} - v_{bot}} = \frac{625\ m}{5\ \frac{m}{s}} = 125\ s$$

az utoléréshez szükséges idő. **1 pont**

A bot elejtésétől visszaszerzéséig összesen eltelt idő tehát:

$$t_b = t_P + t_{utolérés} = \frac{s_P}{v} + \frac{l}{v_{Peti} - v_{bot}} = 250\ s + 125\ s = 375\ s = 6{,}25\ perc$$

1+1 pont

b) rész összesen: 10 pont

Összesen: 20 pont

9. évfolyam, 2. feladat

a)

A gömbre ható erők mindkét esetben:

- a tartóerő (dinamométer rugója által kifejtett erő)
- a nehézségi erő (≈ gravitációs erő, a Föld vonzóereje)
- és a felhajtóerő (a víz által kifejtett erő).

Megfelelő vázlatrajzon is feltüntethetők az erők!
3 pont

A gömb mindkét esetben egyensúlyban van, ezért a rá ható erők eredőjének zérusnak kell lennie.
Mivel mindegyik erő függőleges hatásvonalú, az egyensúlyi feltételek – az erővektorok vetületeit a megfelelő betűkkel jelölve – egyszerűen felírhatók:

$$\left.\begin{aligned} F_{tartó,1} + F_{felhajtó,1} &= F_{neh.} \\ F_{tartó,2} + F_{felhajtó,2} &= F_{neh.} \end{aligned}\right\}$$

Az egyensúlyi egyenletek szöveges indoklás nélküli felírása is elegendő.
2 pont

Az erőtörvények beírásával:

$$\left.\begin{aligned} F_{tartó,1} + \rho_{víz} \cdot V_{gömb} \cdot g &= m_{gömb} \cdot g \\ F_{tartó,2} + \rho_{víz} \cdot \frac{V_{gömb}}{2} \cdot g &= m_{gömb} \cdot g \end{aligned}\right\}$$

3+3=6 pont

Használjuk ki, hogy a gömb tömege

$$m_{gömb} = \rho_{gömb} \cdot V_{gömb}$$

és, hogy a feladat szövege szerint

$$F_{tartó,2} = 1{,}2 \cdot F_{tartó,1}$$

1+1=2 pont

Az egyenletrendszer ennek megfelelően:

$$\left.\begin{aligned} F_{tartó,1} + \rho_{víz} \cdot V_{gömb} \cdot g &= \rho_{gömb} \cdot V_{gömb} \cdot g \\ 1{,}2 \cdot F_{tartó,1} + \rho_{víz} \cdot \frac{V_{gömb}}{2} \cdot g &= \rho_{gömb} \cdot V_{gömb} \cdot g \end{aligned}\right\}$$

1 pont

Az egyenletrendszer megoldásával eljuthatunk a gömb anyagának keresett sűrűségértékéhez:

$$\left.\begin{aligned} F_{tartó,1} &= V_{gömb} \cdot g \cdot (\rho_{gömb} - \rho_{víz}) \\ 1{,}2 \cdot F_{tartó,1} &= V_{gömb} \cdot g \cdot \left(\rho_{gömb} - \frac{\rho_{víz}}{2}\right) \end{aligned}\right\}$$

$$1{,}2 \cdot V_{gömb} \cdot g \cdot (\rho_{gömb} - \rho_{víz}) = V_{gömb} \cdot g \cdot \left(\rho_{gömb} - \frac{\rho_{víz}}{2}\right)$$

$$1{,}2 \cdot \rho_{gömb} - 1{,}2 \cdot \rho_{víz} = \rho_{gömb} - \frac{\rho_{víz}}{2}$$

$$0{,}2 \cdot \rho_{gömb} = 0{,}7 \cdot \rho_{víz}$$

$$\rho_{gömb} = \frac{0{,}7}{0{,}2} \cdot \rho_{víz} = 3{,}5 \cdot \rho_{víz} = 3500\ \frac{kg}{m^3}$$

Tehát a gömb sűrűsége $3500\ \frac{kg}{m^3}$.

3 pont

a) rész összesen:
17 pont

b)

A tartóerők aránya:

$$\frac{F_{tartó,2}}{F_{tartó,1}} = 1,2 = \frac{V_{gömb} \cdot g \cdot \left(\rho_{gömb} - \frac{\rho_{víz}}{2}\right)}{V_{gömb} \cdot g \cdot \left(\rho_{gömb} - \rho_{víz}\right)} = \frac{\rho_{gömb} - \frac{\rho_{víz}}{2}}{\rho_{gömb} - \rho_{víz}}$$

láthatóan csak a sűrűségektől függ, a gömb mérete (térfogata) nem befolyásolja annak értékét. Tehát kétszer akkora térfogatú gömbbel elvégezve a mérést ismételten azt tapasztalhatnánk, hogy 20 %-kal nagyobb erővel kell egyensúlyban tartani a félig bemerülő gömböt, mint azt, amelyik teljesen a víz alatt van.

Megfelelő indoklásra adható a maximális pontszám:
3 pont

b) rész összesen:
3 pont

Összesen:
20 pont

9. évfolyam, 3. feladat

Adatok:

$t_1 = 0{,}64$ s
$s_1 = 80$ cm
$t_2 = 0{,}3$ s
$a = 1{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
$t_4 = 0{,}89$ s
$t_5 = 0{,}5$ s
$s_5 = 59$ cm
$v_{átl} = ?$
$g = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

a)
Az elemelés szakaszában a rúd sebessége:

$$v_1 = \frac{s_1}{t_1} = \frac{0{,}8\ \text{m}}{0{,}64\ \text{s}} = 1{,}25\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

2 pont

A dobás és húzás során ezzel a sebességgel, mint kezdősebességgel a rúd egyenletesen gyorsul, így megtett útja és végsebessége:

$$s_2 = v_1 t_2 + \frac{a}{2} t_2^2 = 1{,}25\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0{,}3\ \text{s} + \frac{1{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2} \cdot (0{,}3\ \text{s})^2 = 0{,}4425\ \text{m} = 44{,}25\ \text{cm}$$

$$v_2 = v_1 + a t_2 = 1{,}25\ \frac{\text{m}}{\text{s}} + 1{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}3\ \text{s} = 1{,}7\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

2+2=4 pont

Ezután a megállásáig a rúd szabadon esik (ill. felfelé hajítást szenvedve fékeződik), így az aláguggolás időtartama, illetve a rúd ez idő alatt (felfelé) megtett útja:

$$t_3 = \frac{v_2}{g} = \frac{1{,}7\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0{,}17\ \text{s}$$

$$s_3 = \frac{g}{2} t_3^2 = \frac{10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2} \cdot (0{,}17\ \text{s})^2 = 0{,}1445\ \text{m} = 14{,}45\ \text{cm}$$

2+2=4 pont

A rúd stabilizálásának ideje alatt nyilvánvalóan nem történik elmozdulás, a rúd nyugalomban van.

$$s_4 = 0$$
$$v_4 = 0$$

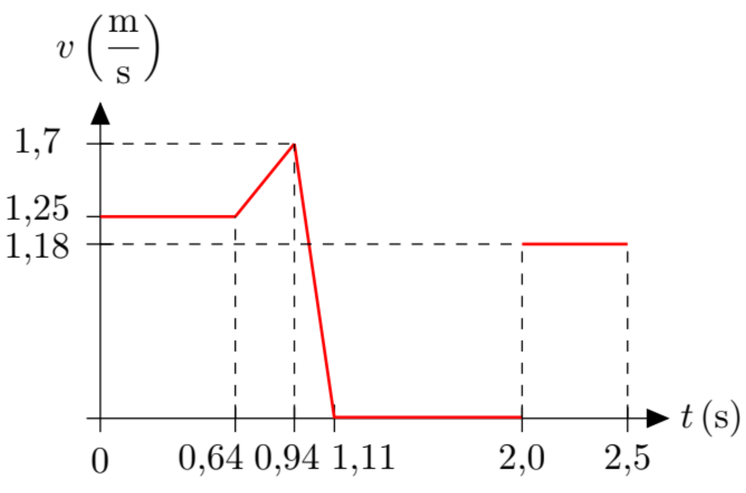
1 pont

A rúddal való felállás sebessége:

$$v_5 = \frac{s_5}{t_5} = \frac{0{,}59\ \text{m}}{0{,}5\ \text{s}} = 1{,}18\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

2 pont

Ezek alapján a rúd sebesség-idő grafikonja:



4 pont

a) rész összesen: 17 pont

b)
A rúd átlagsebessége:

$$\boldsymbol{v}_{\text{át}\boldsymbol{l}} = \frac{s_{\text{összes}}}{t_{\text{összes}}} = \frac{s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5}{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5} = \frac{197{,}7\ \text{cm}}{2{,}5\ \text{s}} = \mathbf{79{,}08}\ \frac{\mathbf{cm}}{\mathbf{s}}$$

2+1=3 pont

b) rész összesen:
3 pont

Összesen:
20 pont

9. évfolyam 4. feladat

a)

A szövegből kiderül, hogy a 0 °C-os víz és jég keverék tömege

$$m_{össz} = 798\ gramm - 500\ gramm = 298\ gramm$$

1 pont

A fűtőszál P teljesítményét állandónak tekintve a jég elolvadásának, illetve az így kialakuló összes víznek a melegedésére felírható energiamérleg:

$$\left.\begin{aligned} P \cdot t_1 &= L_o \cdot m_j \\ P \cdot (t_2 - t_1) &= c \cdot m_{össz} \cdot \Delta T \end{aligned}\right\}$$

ahol $t_1 = 4 \cdot 60\ s = 240\ s$, $t_2 = 5 \cdot 60\ s = 300\ s$, és $\Delta T = 6$ °C.

A mérlegegyenletek felírásáért 3+3=6 pont

Innen

$$\left.\begin{aligned} P \cdot t_1 &= L_o \cdot m_j \\ P \cdot (t_2 - t_1) &= c \cdot m_{össz} \cdot \Delta T \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{t_1}{(t_2 - t_1)} = \frac{L_o \cdot m_j}{c \cdot m_{össz} \cdot \Delta T}$$

illetve

$$\frac{t_1}{(t_2 - t_1)} = \frac{L_o \cdot m_j}{c \cdot m_{össz} \cdot \Delta T} \rightarrow m_j = \frac{t_1 \cdot c \cdot m_{össz} \cdot \Delta T}{L_o \cdot (t_2 - t_1)}$$

Ebből következően eredetileg a kaloriméterben

$$m_j = \frac{t_1 \cdot c \cdot m_{össz} \cdot \Delta T}{L_o \cdot (t_2 - t_1)} = \frac{240s \cdot 4200 J/(kg \cdot °C) \cdot 298\ g \cdot 6°C}{334000 J/kg \cdot 60s} = 89{,}935\ g$$

$$m_j \approx 90\ gramm$$

tömegű jég volt.

3 pont

- - - - - - - - - -

Teljes értékű megoldás, ha a víz melegedésére felírt mérlegegyenletből a teljesítményt kiszámítja a versenyző, és annak felhasználásával határozza meg a jég tömegét:

$$P \cdot (t_2 - t_1) = c \cdot m_{össz} \cdot \Delta T \rightarrow P = \frac{c \cdot m_{össz} \cdot \Delta T}{(t_2 - t_1)}$$

$$P = \frac{c \cdot m_{össz} \cdot \Delta T}{(t_2 - t_1)} = \frac{4200 J/(kg \cdot °C) \cdot 0{,}298\ kg \cdot 6°C}{60s} = 125{,}16\ W$$

$$P \cdot t_1 = L_o \cdot m_j \rightarrow m_j = \frac{P \cdot t_1}{L_o} = \frac{240s \cdot 125{,}16\ W}{334000 J/kg} = 0{,}089935\ kg$$

$$m_j \approx 90\ gramm)$$

(4 +1+3+1 = 9 pont)

a) rész összesen: 10 pont

b)

A víz melegedésének szakaszára felírt energiamérlegből megkaphatjuk a fűtőszál teljesítményét:

$$P \cdot (t_2 - t_1) = c \cdot m_{össz} \cdot \Delta T \rightarrow P = \frac{c \cdot m_{össz} \cdot \Delta T}{(t_2 - t_1)}$$

$$P = \frac{c \cdot m_{össz} \cdot \Delta T}{(t_2 - t_1)} = \frac{4200 J/(kg \cdot °C) \cdot 0{,}298\ kg \cdot 6°C}{60s} = 125{,}16\ W$$

$$P \approx 125\ W$$

Amennyiben a teljesítményt az a) kérdésnél kiszámította, ezt a pontot ott meg kell adni: 1 pont

A tápfeszültség ismeretében kiszámítható az áramerősség

$$I = \frac{P}{U_{fűtő}} = \frac{125{,}16\ W}{50\ V} = 2{,}5032\ A \approx 2{,}5\ A$$

2 pont

Ohm törvényének felhasználásával a fűtőszál üzemi ellenállása:

$$R_{fűtőszál} = \frac{U_{fűtő}}{I} = \frac{50\ V}{2{,}5032\ A} = 19{,}974\ \Omega\ \approx 20\ \Omega$$

\- - - - - - -

2 pont

Természetesen egy lépésben is megkapható az ellenállás értéke:

$$R_{fűtőszál} = \frac{U_{fűtő}^2}{P} = \frac{2500\ V^2}{125{,}16\ W} = 19{,}974\ \Omega\ \approx 20\ \Omega$$

(3+1=4 pont)

b) rész összesen:
5 pont

c)

A huroktörvényt alkalmazva

$$I = \frac{U_{áramforrás}}{R_{fűtőszál} + R_{toló}} \rightarrow U_{áramforrás} = I \cdot R_{fűtőszál} + I \cdot R_{toló}$$

2 pont

vagyis

$$U_{áramforrás} = U_{fűtő} + I \cdot R_{toló} = 50\ V + 2{,}5032\ A \cdot 76\ \Omega$$
$$= 50\ \mathrm{V} + 190{,}24\ \mathrm{V}$$

2 pont

azaz

$$U_{áramforrás} = 240{,}24\ \mathrm{V}\ \approx 240\ V$$

az áramforrás feszültsége.

1 pont

\- - - - - -

Természetesen teljes értékű megoldás, ha a sorosan kapcsolt ellenállások és a rájuk eső feszültségek azonos arányát felírva jut helyes eredményre versenyző:

$$\frac{U_{fűtő}}{R_{fűtőszál}} = \frac{U_{áramforrás}}{R_{fűtőszál} + R_{toló}}$$

egyenletrendezés után

$$U_{áramforrás} = \frac{U_{fűtő}}{R_{fűtőszál}}\left(R_{fűtőszál} + R_{toló}\right) = 240{,}24\ V$$

(4+1=5 pont)

c) rész összesen:
5 pont

Összesen:
20 pont

Budó Ágoston Fizikai Feladatmegoldó Verseny

2021. november 18. 14.00-17.00

Megoldókulcs

Általános megjegyzések: A megoldókulcs elkészítésével segítséget kívánunk nyújtani a javításhoz. Igyekeztünk minél több részpontszámot megjelölni, hogy a javítás minél inkább egységes lehessen. Természetesen a megadottaktól eltérő helyes megoldásokat is el kell fogadni. Ilyen esetekben a megfelelő arányos pontozást a szaktanárokra bízzuk.

10. évfolyam, 1. feladat

A feladat szövege szerint az egyik ellenálláson kétszer olyan erős áram folyik keresztül, mint a többin. Ez úgy lehetséges, ha a kapcsolásban van egy két ágból álló párhuzamos kapcsolás, ahol az egyes ágakban

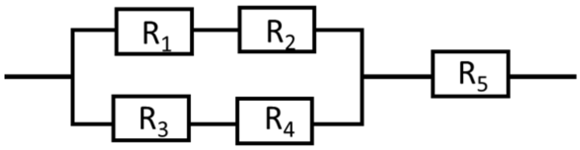
$$I_1 = I_2 \equiv I$$

erősségű áram folyik.
Ezzel a párhuzamos kapcsolással sorosan van kötve az az ellenállás, amelyiken

$$I_{soros} = I_1 + I_2 = 2 \cdot I$$

erősségű áram halad át. **4 pont**

A megfelelő kapcsolási rajz:



2 pont

Mivel az ellenállások közel azonos értékűek, a párhuzamos kapcsolás ágaiban két-két ellenállás kell, hogy legyen, és mivel a párhuzamosan kapcsolt ellenállásokon ugyanakkora áramnak kell átfolynia, az ágak eredő ellenállásának egyenlő nagyságúnak kell lennie.
Tehát a párhuzamosan kapcsolt négy ellenállásra az

$$R_1 + R_2 = R_3 + R_4$$

feltételnek teljesülnie kell. **4 pont**

Innentől próbálkozással meg lehet találni a megfelelő helyekre beforrasztandó ellenállásokat, de némi gondolkodással szűkíthetjük a lehetséges kapcsolások körét.
Felhasználhatjuk, hogy mivel az eredő ellenállás és az egyes ellenállások értéke is egész szám, így a párhuzamos kapcsolás R_p eredő ellenállásának is egész számnak kell lennie.
De akkor az egyes ágakban lévő ellenállások összege

$$R_1 + R_2 = R_3 + R_4 = 2 \cdot R_p$$

is egész, sőt páros szám. Ebből már következik, hogy a 11 ohmos és a 13 ohmos ellenállásnak kell sorban kötve szerepelnie az egyik ágban. Ami maga után vonja, hogy a másik ág ellenállásának eredője is 24 ohm kell, hogy legyen, ami csak úgy lehetséges, ha a 10 és 14 ohmos ellenállást forrasztjuk össze egymással sorosan. A kimaradó ötödik, 12 ohmos ellenállást kell a másik négy párhuzamos kapcsolásával sorba kötni.
Tehát a kapcsolási rajz jelöléseit használva a megoldás:

$$R_1 = 11\ vagy\ 13\ \Omega, R_2 = 13\ vagy\ 11\ \Omega, R_3 = 10\ vagy\ 14\ \Omega,$$

$$R_4 = 14\ vagy\ 10\ \Omega, R_5 = 12\ \Omega$$

A helyes eredmények próbálkozással történő megkeresése is teljesértékű megoldásnak minősül.
10 pont

(Ellenőrzésként szolgálhat még az a tény is, hogy a párhuzamos kapcsoláshoz felhasznált négy ellenállásra teljesülnie kell, hogy

$$R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = 2 \cdot 2 \cdot R_p = 4 \cdot R_p$$

vagyis 4-gyel osztható számnak kell lennie.
Ez viszont a megadott értékekkel csak úgy valósítható meg, ha a sorosan kapcsolandó ellenállás a 12 ohmos, ugyanis

$$R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 = 60$$

amiből 4-gyel osztható számot egy ellenállást elvéve csak úgy kaphatunk, ha az a 12 ohmos. Ekkor ugyanis

$$R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = 60 - R_5 = 60 - 12 = 48)$$

Összesen: 20 pont

10. évfolyam, 2. feladat

Adatok:
$\mu_0 = 1{,}7$
$R = 130\ m$
$v = 312\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 86{,}67\ \frac{m}{s}$

Sebességérték átváltása: 1 pont

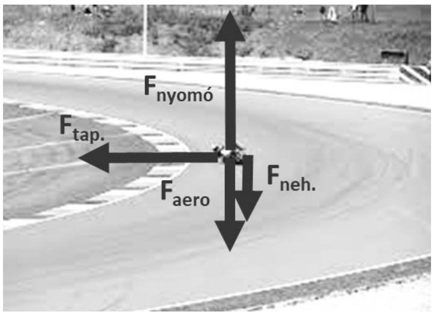
A kanyarodó autó sebességének nagyságát állandónak tekintve a kanyar csúcspontjában meglévő (centripetális) gyorsulása

$$a_{cp} = \frac{v^2}{R} = \frac{\left(86{,}67\ \frac{m}{s}\right)^2}{130\ m} = 57{,}78\ \frac{m}{s^2} (= 5{,}89g)$$

2 pont

Az autóra ható erők:

- a nehézségi erő (*ami nagyságra nézve egyenlő a súlyával*),
- az aerodinamikai leszorítóerő,
- az aszfalt által kifejtett erő nyomókomponense
- és az aszfalt által kifejtett erő tapadási komponense.



(Csúszásmentes gördülést feltételezve a kerék aszfalttal érintkező pontjának relatív sebessége zérus, így valóban nyugalmi súrlódásról, tapadásról beszélhetünk.)
(Az aerodinamikai felhajtóerő az autóra hat, az autó súlya viszont a talajra, ill. a vízszintes alátámasztásra – egyensúly esetén, amikor csak a szabadesését meggátló alátámasztás tartja a testet.)

Az erők felsorolása helyett elfogadható egy megfelelő ábra, vagy ha a mozgásegyenlet felírásából beazonosíthatók az egyes erők. A súly és a nehézségi erő kapcsolatára történő utalás szükséges! 4 pont

A középpont felé irányuló gyorsulást a kerekek (ill. a gumiabroncsok) és az aszfalt között fellépő tapadási erőnek kell biztosítania, az autóra ható többi erők ugyanis függőleges hatásvonalúak.
Az autó mozgásegyenlete sugárirányú vízszintes, és függőleges tengelyekkel rendelkező koordinátarendszerben vett vetületekkel felírva:

$$\left.\begin{aligned} F_{tap} &= m \cdot a_{cp} \\ F_{nyomó} &= F_{neh.} + F_{aero} \end{aligned}\right\}$$

illetve

$$\left.\begin{aligned} F_{tap} &= m \cdot \frac{v^2}{R} \\ F_{nyomó} &= m \cdot g + F_{aero} \end{aligned}\right\}$$

3+3 = 6 pont

Mivel a tapadási erő nem haladhatja meg a nyomóerő tapadási együtthatóval való szorzatát, azaz

$$F_{tap} \le \mu_0 \cdot F_{nyomó}$$

a köríven maradás feltétele, hogy

$$F_{tap} = m \cdot a_{cp} \le \mu_0 \cdot F_{nyomó}$$

teljesüljön.

2 pont

A nyomóerő kifejezését behelyettesítve kaphatjuk, hogy

$$m \cdot a_{cp} \le \mu_0 \cdot (m \cdot g + F_{aero})$$

illetve

2 pont

$$m \cdot a_{cp} \leq \mu_0 \cdot m \cdot g + \mu_0 \cdot F_{aero}$$

Mindkét oldalt elosztva a nehézségi erő (egyben a súlyerő) $m \cdot g$ nagyságával, kialakíthatjuk a keresett hányadost (arányt):

$$\frac{a_{cp}}{g} \leq \mu_0 + \mu_0 \cdot \frac{F_{aero}}{m \cdot g}$$

Innen átrendezéssel adódik a végeredmény:

$$\frac{F_{aero}}{m \cdot g} \geq \frac{\frac{a_{cp}}{g} - \mu_0}{\mu_0}$$

$$\frac{F_{aero}}{m \cdot g} \geq \frac{a_{cp}}{\mu_0 \cdot g} - 1$$

$$\frac{F_{aero}}{m \cdot g} \geq \frac{5{,}89g}{1{,}7 \cdot g} - 1$$

$$\frac{F_{aero}}{m \cdot g} \geq 2{,}465$$

Tehát az aerodinamikai leszorítóerő nagysága az autó súlyának *minimum* 2,465-szerese kell, hogy legyen.

Teljesértékű a megoldás, ha a versenyző mindvégig a tapadási erő maximumával számol (azaz egyenlőséggel), de a végén jelzi, hogy a kapott arány a szükséges minimum.
3 pont

Összesen:
20 pont

10. évfolyam, 3. feladat

Adatok:
$m = 2{,}7$ kg
$a = 15$ cm
$A = 6{,}75\ \mathrm{dm}^2$
$\rho_{víz} = 1000 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} = 1\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$

a)
Ahhoz, hogy a kocka teljesen víz alá nyomható legyen, legalább olyan térfogatú vízre van szükség, hogy a kocka felső lapjának magasságáig álljon víz az edényben. (A kocka alsó lapja és az edény feneke között, továbbá a kocka felső lapja fölött nagyon vékony vízréteget képzelünk el.)
Azaz
$$V_{min,lenyomás} = A \cdot a - A_1 \cdot a = (A - A_1) \cdot a = (675 - 225)\mathrm{cm}^2 \cdot 15\ \mathrm{cm}$$
$$V_{min,lenyomás} = 6750\ \mathrm{cm}^3$$
Tehát az edényben legalább $6750\ \mathrm{cm}^3$ térfogatú víznek kell lennie.

Az edény teljes űrtartalmát a víz és a lenyomott kocka össztérfogata adja meg:
$$V_{min,edény} = V_{min,lenyomás} + V = 6750\ \mathrm{cm}^3 + 3375\ \mathrm{cm}^3$$
$$V_{min,edény} = 10125\ \mathrm{cm}^3$$
Vagyis minimum 10,125 literes edényre van szükség ahhoz, hogy a kocka lenyomása végrehajtható legyen anélkül, hogy víz folyna ki az edényből. **2+2=4 pont**

a) rész összesen: 4 pont

b)
A test térfogata $V = a^3 = (15\ \mathrm{cm})^3 = 3375\ \mathrm{cm}^3$, így a test sűrűsége:
$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{2700\ \mathrm{g}}{3375\ \mathrm{cm}^3} = 0{,}8\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$$
2 pont

Mivel $\rho < \rho_{víz}$, így a test úszik a vízen. A nehézségi erő és az Arkhimédész törvényéből számítható felhajtóerő hat a testre, ezek eredője az egyensúlyi helyzetben zérus kell, hogy legyen. A bemerülő térfogatrész nagyságát az egyensúly feltételéből megkaphatjuk:
$$m \cdot g = F_{fel,0} \rightarrow \rho \cdot V \cdot g = \rho_{víz} \cdot V_{be} \cdot g \rightarrow V_{be} = \frac{\rho}{\rho_{víz}} \cdot V = 0{,}8 \cdot V$$
$$V_{be} = 2700\ \mathrm{cm}^3$$
Vagyis – mivel a kocka stabil egyensúlyi helyzetben úszik –, a bemerülési mélység
$$a_{be} = 0{,}8 \cdot a = 12\ \mathrm{cm}.$$
2 pont

Az úszó kocka vízből kiálló részének magassága:
$$a_{ki} = a - a_{be} = 0{,}2 \cdot a = 3\ \mathrm{cm}.$$
Miközben a test vízből kiálló, $0{,}2 \cdot V = 675\ \mathrm{cm}^3$ térfogatú részét a víz alá nyomjuk, a vízszint emelkedése:
$$\Delta h = \frac{V_{ki}}{A} = \frac{0{,}2 \cdot V}{A} = \frac{675\ \mathrm{cm}^3}{675\ \mathrm{cm}^2} = 1\ \mathrm{cm}$$
[Ennek belátása megtörténhet pl. úgy, hogy figyelembe vesszük a víz összenyomhatatlanságának következményét, azaz, hogy az edényben lévő víz térfogata állandó.

Annak bizonyítása, hogy a lenyomás során a vízszint emelkedése $\Delta h = \frac{V_{ki}}{A}$ nem követelmény.

Tegyük fel, hogy mielőtt a kockát úszó helyzetéből a víz alá nyomjuk, az edényben h magasságig áll a víz! Az edény alapterületét A-val, a kockáét A_1-gyel jelölve ez a következő víztérfogatot jelenti:

$$V_{víz} = (A - A_1) \cdot h + A_1 \cdot (h - a_{be})$$

Amikor a kocka felső lapja éppen a víz alá kerül, legyen a vízszint az edény fenekétől mérve $h + \Delta h$ magasságban. Akkor az edényben lévő vízmennyiségre felírható, hogy

$$V_{víz} = (A - A_1) \cdot (h + \Delta h) + A_1 \cdot (h + \Delta h - a)$$

A víztérfogat állandósága miatt:

$$(A - A_1) \cdot h + A_1 \cdot (h - a_{be}) = (A - A_1) \cdot (h + \Delta h) + A_1 \cdot (h + \Delta h - a)$$

$$A \cdot h - A_1 \cdot a_{be} = A \cdot (h + \Delta h) - A_1 \cdot a$$

$$A_1 \cdot (a - a_{be}) = A \cdot \Delta h$$

$$\Delta h = \frac{A_1 \cdot a_{ki}}{A} = \frac{a^2 \cdot 0{,}2 \cdot a}{A} = \frac{0{,}2 \cdot V}{A} = \frac{675 \text{ cm}^3}{675 \text{ cm}^2} = 1 \text{ cm},$$

a fentebb megadott eredménnyel egyezően.]

(De ha a versenyző a

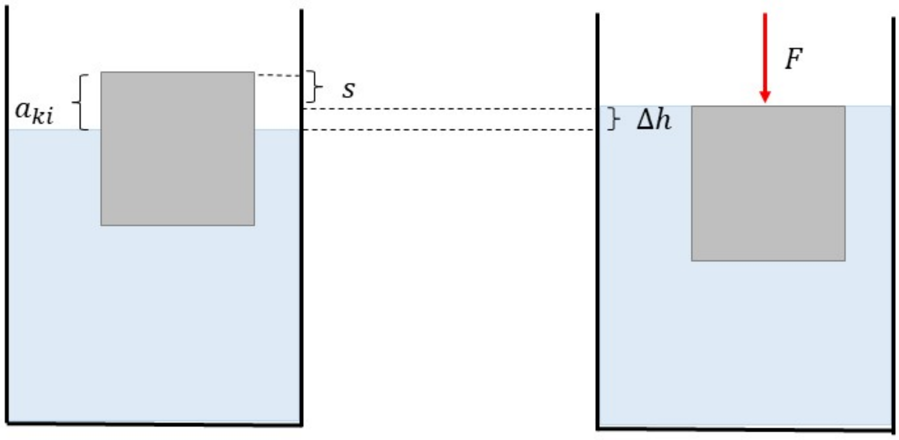
$$\Delta h = \frac{V_{ki}}{A - A_1}$$

összefüggést használja, erre a részre nem kaphat pontot.)
3 pont

Ez azt jelenti, hogy a lenyomás során a kockát

$$s = a_{ki} - \Delta h = 2 \text{ cm}$$

úton kell mozgatnunk, hogy a víz alá kerüljön.



3 pont

Mivel a lenyomás a feladat szerint egyenletesen történik, így a folyamat minden egyes pillanatában:

$$F + mg = F_{fel}$$

A felhajtóerő – lévén a lenyomás során a test egyre nagyobb része kerül a víz alá – egyenletesen növekszik a megtett úttal a kezdeti (minimális)

$$F_{fel,0} = \rho_{víz} g \cdot 0{,}8\, V = mg = 27 \text{ N}$$

nagyságról a végső (maximális)

$$F_{fel,v} = \rho_{víz} g V = 33{,}75 \text{ N}$$

értékre.
Azaz, az általunk kifejtett F erőt is egyenletesen kell növelnünk az

$$F_0 = 0 \text{ N}$$

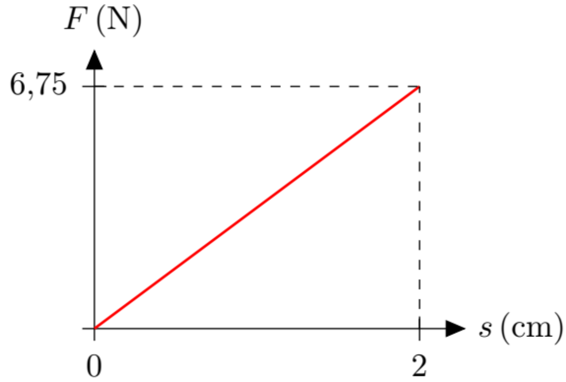
minimális értékről az

$$F_v = F_{fel,v} - F_{fel,0} = 6{,}75 \text{ N}$$

nagyságú maximális nagyságra az $s = 2$ cm úton.

Ha a versenyző az elmozdulást rosszul határozza meg, de utána a munka kiszámítása helyes, ezt, és a következő részpontszámot megkaphatja.
4 pont

Tehát, egy egyenletesen változó erő munkáját kell kiszámolnunk. A keresett munka megkapható az erő-elmozdulás grafikon alatti terület kiszámításával:



$$\boldsymbol{W} = \frac{F_v}{2} s = \frac{6{,}75\ \mathrm{N}}{2} \cdot 0{,}02\ \mathrm{m} = \mathbf{67{,}5\ mJ}$$

Elfogadható a lineáris változásra hivatkozva „átlagerővel” (számtani közép) történő számolás is.
2 pont

b) rész összesen: 16 pont

Összesen: 20 pont

10. évfolyam, 4. feladat

a)

Egyenletes emelés esetén a testre ható erők eredője nulla, vagyis az emelő erő egyenlő nagyságú a nehézségi erővel:

$$F_{emelő} = F_{nehézségi} = m \cdot g$$

A teljesítmény a munkavégzés folyamatának intenzitását jellemzi, kiszámítása:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{F \cdot s}{t} = \frac{m \cdot g \cdot s}{t}$$

ahol esetünkben s az emelés magasságát jelöli. A teljesítmény wattban megadott értékének megadásához helyettesítsük be a szereplő mennyiségeket SI-egységekben:

$$P = \frac{75\ kg \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2} \cdot 1\ m}{1\ s} = 735{,}75\ \frac{N \cdot m}{s} = 735{,}75\ \frac{J}{s} = 735{,}75\ W$$

Tehát

$$1\ LE = 735{,}75\ W$$

vagy **4 pont**

$$1\ W = \frac{1}{735{,}75} LE \approx 1{,}36 \cdot 10^{-3}\ LE$$

a) rész összesen: 4 pont

b)

(A szélsőérték természetesen differenciálással is meghatározható, ezt a megoldást azonban nem ismertetjük.)

A tanulmányozott kifejezés egyszerűbb kezelhetősége érdekében a mértékegységeket elhagyjuk, de nem feledjük, hogy a teljesítmény wattban, a fordulatszám pedig 1/s-ban megadva szerepel!

$$P(f) = -12{,}828 \cdot f^2 + 2569{,}0 \cdot f$$

Ennek a kifejezésnek kell megtalálni a maximumát, azaz azt a fordulatszámot, amely mellett maximális teljesítményt szolgáltat a motor. A kifejezést teljes négyzetté alakítjuk, és így keressük meg a szélsőértékét.

$$P(f) = -(12{,}828 \cdot f^2 - 2569{,}0 \cdot f)$$

$$P(f) = -\left[\sqrt{12{,}828} \cdot f - \frac{2569{,}0}{2 \cdot \sqrt{12{,}828}}\right]^2 + \left(\frac{2569{,}0}{2 \cdot \sqrt{12{,}828}}\right)^2$$

Ebből az alakból jól látszik, hogy a *P(f)* függvény grafikus képe egy lefelé nyitott parabola, azaz ennek a másodfokú kifejezésnek a szélsőértéke maximum lesz.

6 pont

A kifejezés szélsőértéke ott van, ahol a szögletes zárójelben szereplő kifejezés zérus:

$$\sqrt{12{,}828} \cdot f - \frac{2569{,}0}{2 \cdot \sqrt{12{,}828}} = 0$$

ezért a motor maximális teljesítményt az

$$f_{max} = \frac{2569{,}0}{2 \cdot 12{,}828} = 100{,}13\ \frac{1}{s} = 6008\ \frac{1}{perc}$$

fordulatszámon fog szolgáltatni.

A maximális teljesítmény f visszahelyettesítésével:

$$P_{max} = P(f = f_{max}) = -12{,}828 \cdot 100{,}13^2 + 2569{,}0 \cdot 100{,}13$$

$$P_{max} = 128{,}62\ kW = 174{,}8\ LE$$

2+2+2= =6 pont

b) rész összesen: 12 pont

c)

Egy M nagyságú forgatónyomaték pillanatnyi teljesítményét a

$$P = M \cdot \omega$$

összefüggés alkalmazásával számíthatjuk ki, ahol

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$$

a forgatónyomaték által perdített test pillanatnyi szögsebessége.

(Az összefüggés viszonylag könnyen levezethető. Tegyük fel, hogy egy F nagyságú, r karral rendelkező erő igen kicsi $\Delta\varphi$ szöggel elfordít egy merev testet!

Akkor az – érintő irányúnak feltételezett – erő munkája a szögelforduláshoz tartozó Δi íven

$$\mathrm{W} = \mathrm{F} \cdot \Delta i$$

Ha $\Delta\varphi$ radiánban van, akkor

$$\Delta i = r \cdot \Delta\varphi$$

azaz

$$\mathrm{W} = \mathrm{F} \cdot \Delta i = \mathrm{F} \cdot r \cdot \Delta\varphi = M \cdot \Delta\varphi.$$

Innen már adódik a teljesítményre érvényes összefüggés:

$$P = \frac{W}{\Delta t} = M \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = M \cdot \omega.$$

Az itt ismertetett gondolatmenet nem szükséges a teljes értékű megoldáshoz!)

A maximális teljesítményhez tartozó forgatónyomaték eszerint a következő összefüggésből kapható meg:

$$P_{max} = M_P \cdot \omega_{max} = M_P \cdot 2\pi \cdot f_{max}$$

$$M_P = \frac{P_{max}}{2\pi \cdot f_{max}} = \frac{128620 W}{2\pi \cdot 100{,}13 \frac{1}{s}} \approx 204{,}4\ Nm$$

Tehát a motor a maximális teljesítményhez tartozó fordulatszámon kb. 204,4 Nm nagyságú forgatónyomatékot szolgáltat.

A teljesítményt és a forgatónyomatékot összekapcsoló összefüggés függvénytáblázatból is vehető!
4 pont

c) rész összesen:
4 pont

Összesen:
20 pont

Budó Ágoston Fizikai Feladatmegoldó Verseny

2021. november 18. 14.00-17.00

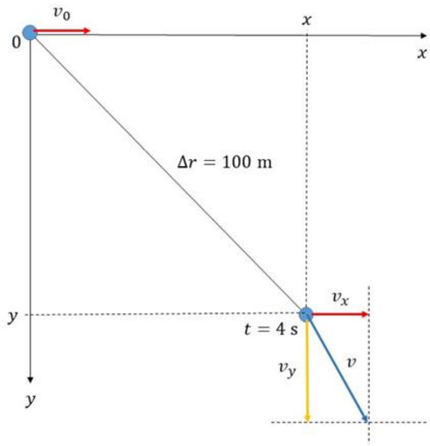
<u>Megoldókulcs</u>

Általános megjegyzések: A megoldókulcs elkészítésével segítséget kívánunk nyújtani a javításhoz. Igyekeztünk minél több részpontszámot megjelölni, hogy a javítás minél inkább egységes lehessen. Természetesen a megadottaktól eltérő helyes megoldásokat is el kell fogadni. Ilyen esetekben a megfelelő arányos pontozást a szaktanárokra bízzuk.

11. évfolyam, 1. feladat

a)

A vízszintes hajítás összetett mozgás: egy vízszintes irányú, a kezdősebességgel történő egyenes vonalú egyenletes mozgásból és egy (függőleges irányú) szabadesésből tehető össze.



A test függőleges irányú elmozdulását ki is tudjuk számolni:

$$y = \frac{g}{2}t^2 = \frac{10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2} \cdot (4\ \mathrm{s})^2 = 80\ \mathrm{m}$$

4 pont

A vízszintes irányú elmozdulása Pitagorasz-tételéből számolható:

$$x = \sqrt{\Delta r^2 - y^2} = \sqrt{(100\ \mathrm{m})^2 - (80\ \mathrm{m})^2} = 60\ \mathrm{m}$$

4 pont

A vízszintes irányú elmozdulás ismeretében a test kezdősebessége is adódik:

$$\boldsymbol{v_0} = \frac{x}{t} = \frac{60\ \mathrm{m}}{4\ \mathrm{s}} = \mathbf{15}\ \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s}}$$

4 pont

a) rész összesen: 12 pont

b)

A test függőleges irányú sebessége:

$$v_y = gt = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 4\,s = 40\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

2 pont

A test vízszintes irányú sebessége állandó, megegyezik a kezdősebességgel,

$$v_x = v_0,$$

így ismét Pitagorasz-tételét használva:

$$\boldsymbol{v} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(15\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 + \left(40\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2} = \mathbf{42{,}72\ \frac{m}{s}}$$

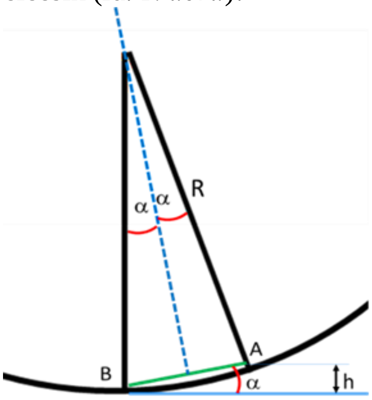
3+3=6 pont

b) rész összesen: 8 pont

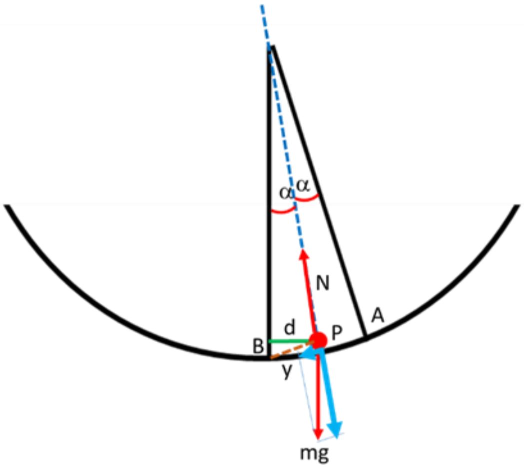
Összesen: 20 pont

11. évfolyam, 2. feladat

Metsszük el a gömböt azzal a függőleges síkkal, amelybe mindkét test pályája beleesik (ld. *1. ábra*)!



1. ábra



2. ábra

Mivel az *AB* távolság nagyon kicsi a gömb *R* sugarához képest, az ábrán α-val jelölt szögek nagyon kicsik, azaz

$$\alpha \approx sin\alpha \approx tg\alpha.$$

Az *AB* köríven mozgó kisméretű test egy matematikai ingával analóg mozgást végez. Ha ugyanis a rá ható erőket nézzük, akkor egy sugárirányú nyomóerőt és a nehézségi erőt kell figyelembe vennünk, hasonlóan, mint a fonálingánál a kötélerőt és a nehézségi erőt.

Mivel kis szögekről van szó, a gömbfelületen lecsúszó testnek az egyensúlyi helyzettől (*B* pont) mért pillanatnyi *y* kitérése (ami a metszet-körnek *BP* húrja) körülbelül egyenlő a *B*-n átmenő függőleges egyenestől mért távolságával (ami pedig egy fél húr, *d*). Emiatt érintő és sugárirányú tengelyekkel rendelkező koordinátarendszerben vizsgálva a mozgásegyenletben szereplő vektorok vetületeit:

$$\left.\begin{aligned} m\cdot g\cdot sin\alpha &= m\cdot a_é \\ N - mgcos\alpha &= m\cdot a_{cp} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} m\cdot g\cdot \frac{d}{R} &= m\cdot a_é \\ N - mgcos\alpha &= m\cdot a_{cp} \end{aligned}\right\}$$

amiből kis szögekre adódik, hogy

$$\left.\begin{aligned} g\cdot \frac{y}{R} &\approx a_é \\ N - mg &\approx m\cdot a_{cp} \end{aligned}\right\}$$

Vagyis a kis test érintő irányú gyorsulása az egyensúlyi helyzettől mért távolsággal egyenesen arányos, és – a nehézségi erő érintőleges komponensének irányából következően – az egyensúlyi helyzet felé mutat. Emiatt a kis test harmonikus rezgőmozgást fog végezni

$$g\cdot \frac{y}{R} = \omega^2\cdot y \;\rightarrow T = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{R}{g}}$$

rezgésidővel.

Vagyis a gömbfelületen mozgó kis test

$$\Delta t_{gömb} = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{\frac{R}{g}}$$

idő alatt jut el *A*-ból *B*-be.

A teljesértékű megoldáshoz elég, ha a versenyző a matematikai ingával való párhuzamot megindokolja, részletes levezetés nélkül használhatja a lengésidő-formulát!
8 pont

A lejtőn csúszó kis test állandó gyorsulással mozog, ui. az α hajlásszögű lejtőn mozgó testre felírva a mozgásegyenletet, könnyen kapjuk, hogy

$$\left.\begin{array}{r} m\cdot g\cdot sin\alpha = m\cdot a \\ N = mgcos\alpha \end{array}\right\}$$

azaz a lejtő (az AB „húr”) felületével párhuzamos gyorsulás

$$g\cdot sin\alpha = a$$

4 pont

Mivel állandó gyorsulású mozgásra nézve

$$s = \frac{a}{2}\cdot\left(\Delta t_{lejtő}\right)^2$$

és a geometriai viszonyokból következően

$$s = AB\ húr = 2\cdot R\cdot sin\alpha$$

4 pont

így

$$\Delta t_{lejtő} = \sqrt{\frac{2\cdot s}{a}} = \sqrt{\frac{4\cdot R\cdot sin\alpha}{g\cdot sin\alpha}} = 2\cdot\sqrt{\frac{R}{g}}$$

2 pont

A végeredmény tehát:

$$\frac{\Delta t_{lejtő}}{\Delta t_{gömb}} = \frac{2\cdot\sqrt{\frac{R}{g}}}{\frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{\frac{R}{g}}} = \frac{4}{\pi}$$

vagy

$$\frac{\Delta t_{gömb}}{\Delta t_{lejtő}} = \frac{\pi}{4}$$

azaz a lejtőn hosszabb idő alatt csúszik le a kis test, mint a gömbfelületen.

2 pont

Összesen:
20 pont

11. évfolyam, 3. feladat

Adatok:
$A = 10\ \mathrm{dm}^2 = 10^{-1}\ \mathrm{m}^2$
$m = 20\ \mathrm{kg}$
$V_k = 8\ \mathrm{dm}^3 = 8 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3$
$m_k = 30\ \mathrm{kg}$
$D = 2000\ \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$
$l_0 = 40\ \mathrm{cm}$
$h = 70\ \mathrm{cm} = 0{,}7\ \mathrm{m}$
$p_0 = 10^5\ \mathrm{Pa}$
$f = 3$
$Q_{összes} = 5000\,J$

Első lépésként határozzuk meg a bezárt gáz térfogatát! A bezárt gáz térfogata az edény dugattyúval elzárt térfogatának és a kocka térfogatának különbsége:

$$V_1 = A \cdot h - V_k = 10^{-1}\ \mathrm{m}^2 \cdot 0{,}7\ \mathrm{m} - 8 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3 = 0{,}062\ \mathrm{m}^3$$

1 pont

A rugó kezdeti hosszát úgy kapjuk, hogy a dugattyú kezdeti magasságából kivonjuk a kocka magasságát:

$$l_1 = h - \sqrt[3]{V_k} = 70\ \mathrm{cm} - 20\ \mathrm{cm} = 50\ \mathrm{cm} = 0{,}5\ \mathrm{m}$$

A rugó tehát már kezdetben is nyújtott állapotban van, megnyúlása és az általa kifejtett erő nagysága:

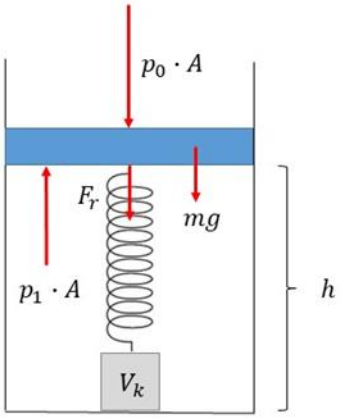
$$x_1 = l_1 - l_0 = 0{,}1\ \mathrm{m} \rightarrow F_{r1} = D \cdot x_1 = 200\ \mathrm{N}$$

1+1=2 pont

Határozzuk meg a gáz kezdeti nyomását! A dugattyúra négy erő hat: az mg nehézségi erő, az F_{r1} rugóerő, a külső légnyomás által kifejtett $p_0 \cdot A$ erő, valamint a bezárt gáz által kifejtett $p_1 \cdot A$ erő.
A dugattyú egyensúlyban van, így:

$$mg + F_{r1} + p_0 \cdot A = p_1 \cdot A$$

$$\rightarrow p_1 = \frac{mg + F_{r1} + p_0 \cdot A}{A} = \frac{200\ \mathrm{N} + 200\ \mathrm{N} + 10^5\ \mathrm{Pa} \cdot 10^{-1}\ \mathrm{m}^2}{10^{-1}\ \mathrm{m}^2} = 104000\ \mathrm{Pa}$$



3 pont

Melegítés hatására a dugattyú emelkedni kezd, ennek következtében a rugó megnyúlik. A rugó megnyúlása addig tart, amíg a rugóerő eléri a kockára ható nehézségi erő nagyságát.

$$D \cdot x_2 = m_k g \rightarrow x_2 = \frac{m_k g}{D} = \frac{300\ \mathrm{N}}{2000\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}} = 0{,}15\ \mathrm{m}$$

2 pont

Ekkor a gáz nyomása:

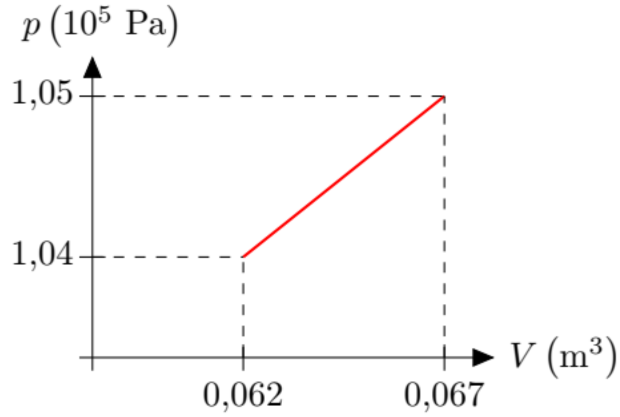
$$p_2 = \frac{mg + D \cdot x_2 + p_0 \cdot A}{A} = \frac{200\ \mathrm{N} + 300\ \mathrm{N} + 10^5\ \mathrm{Pa} \cdot 10^{-1}\ \mathrm{m}^2}{10^{-1}\ \mathrm{m}^2} = 105000\ \mathrm{Pa}$$ **2 pont**

Ezidáig a dugattyú $x_2 - x_1 = 0{,}05$ m-rel kerül feljebb. A gáz térfogata ekkor:

$$V_2 = V_1 + (x_2 - x_1) \cdot A = 0{,}062\ \mathrm{m}^3 + 0{,}05\ \mathrm{m} \cdot 10^{-1}\ \mathrm{m}^2 = 0{,}067\ \mathrm{m}^3$$

Ha eddig az állapotig eljut a rendszer, akkor ezt követően a rugó megnyúlása már nem változik, további melegítés (hőközlés) hatására a dugattyú és a kocka együtt emelkednek, miközben a gáz nyomása változatlan marad. **1 pont**

Ellenőrizzük, hogy eljut-e idáig a rendszer! Nézzük meg, hogy mennyi hőt kellett közölnünk a bezárt gázzal, hogy a (p_2, V_2) állapotba juttassuk!
A gáz nyomása egyenletesen p_1-ről p_2-re nőtt, miközben térfogata V_1-ről V_2-re változott. A gáz által végzett munka abszolút értékét a $p - V$ grafikon alatti terület számértéke adja.



A gáz munkája a folyamatban

$$W_{gáz} = \frac{p_1 + p_2}{2}(V_2 - V_1) = 522{,}5\ \mathrm{J}$$

A gáz belső energiájának megváltozása (héliumról lévén szó a szabadsági fokok száma $f = 3$):

$$\Delta E_b = E_2 - E_1 = \frac{f}{2}p_2V_2 - \frac{f}{2}p_1V_1 = \frac{3}{2}p_2V_2 - \frac{3}{2}p_1V_1 = 880{,}5\ \mathrm{J}$$

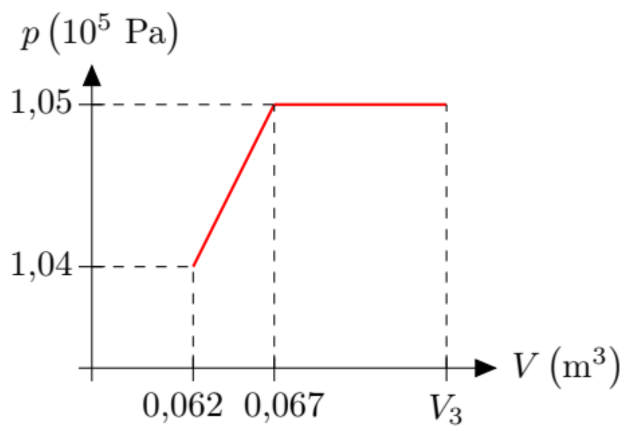
A termodinamika I. főtétele értelmében a közölt hő egy része a gáz térfogati munkavégzésére fordítódik, másik része a gáz belső energiáját növeli:

$$Q = \Delta E_b - W_{környezet} = \Delta E_b + W_{gáz} = 880{,}5\ \mathrm{J} + 522{,}5\ \mathrm{J} = 1403\ \mathrm{J} < 5000\ \mathrm{J}$$

Mivel a bezárt gáz (p_2, V_2) állapotba juttatásához eszerint 1403 J hő szükséges, ami kevesebb, mint az általunk közölt 5000 J, a rendszer eljut addig az állapotig, míg a kocka elkezd felemelkedni.

(Ha a versenyző ezt az ellenőrzést nem végzi el, hanem a következő rész szerint halad, megkaphatja a két részre együttesen járó 7 pontot)
2 pont

A továbbiakban változatlan nyomása mellett a dugattyú és a kocka együtt emelkedik, míg a gáz térfogata bizonyos V_3 értékre növekszik. A $p - V$ grafikon tehát a következőképp néz ki:



5 pont

Ismételten a termodinamika I. főtételét fogjuk használni.
A gáz által végzett térfogati munka a teljes folyamatban:

$$W_{gáz,összes} = \frac{p_1 + p_2}{2}(V_2 - V_1) + p_2 \cdot (V_3 - V_2)$$

A gáz belső energiájának megváltozása a teljes folyamatban:

$$\Delta E_{b,összes} = E_3 - E_1 = \frac{f}{2} p_2 V_3 - \frac{f}{2} p_1 V_1 = \frac{3}{2} p_2 V_3 - \frac{3}{2} p_1 V_1$$

Az I.főtétel szerint:

$$Q_{összes} = \Delta E_{b,összes} - W_{környezet,összes} = \Delta E_{b,összes} + W_{gáz,,összes}$$

$$Q_{összes} = \frac{p_1 + p_2}{2}(V_2 - V_1) + p_2 \cdot (V_3 - V_2) + \frac{3}{2} p_2 V_3 - \frac{3}{2} p_1 V_1$$

Innen a bezárt gáz V_3 végső térfogata kifejezhető:

$$V_3 = \frac{Q_{összes} - \frac{p_1 + p_2}{2}(V_2 - V_1) + p_2 V_2 + \frac{3}{2} p_1 V_1}{\frac{5}{2} p_2} = 0{,}0807\ \mathrm{m}^3$$

A bezárt gáz térfogata a folyamat során $\Delta V = V_3 - V_1 = 0{,}0187\ \mathrm{m}^3$-rel nőtt, így a dugattyú emelkedése:

$$\Delta \boldsymbol{h} = \frac{\Delta V}{A} = \mathbf{18,7\ cm}$$

A dugattyú $\mathbf{18,7}$ **cm**-t emelkedik, ha 5000 J hőt közlünk vele. **2 pont**

Összesen: 20 pont

11. évfolyam, 4. feladat

a)

A kisebb tömegű rúdban megindulásának pillanatában

$$\mathcal{E}_{0,1} = B \cdot l \cdot v_0$$

nagyságú elektromotoros erő indukálódik, aminek következményeként áram indul a két rúd és az őket összekötő sínpár alkotta zárt körben.
Ennek következményeként az áramvezetőkre

$$F = B \cdot I \cdot l$$

mágneses erő hat, aminek iránya a rudak esetében olyan lesz, hogy a kisebb tömegűnek csökkenti a sebességét, a nagyobb tömegűt viszont „megmozdítja”, sebességét nulláról elkezdi megnövelni. Ha viszont a nagyobb tömegű rúd is mozgásba jön, benne ugyancsak indukálódik elektromotoros erő, ami a körben folyó áram értékét, ezen keresztül a mágneses erőket, valamint a rudak gyorsulásának nagyságát is befolyásolni fogja.
A történéseket írjuk le mennyiségileg!

Ha a további lépésekből kiderül, hogy a versenyző ennek megfelelően gondolkodott, meg kell kapnia ezt a pontot.
1 pont

Először is tisztázzuk, mekkora ellenállású a nagyobb tömegű rúd! A rudak hossza és anyaga, tehát $\rho_{mech.}$ sűrűsége megegyezik, ezért

$$m_2 = \rho_{mech.} \cdot A_2 \cdot l = 2 \cdot m_1 = \rho_{mech.} \cdot A_1 \cdot l$$

alapján nyilvánvaló, hogy a nagyobb tömegű rúd keresztmetszete kétszer akkora, mint a kisebb tömegűé,

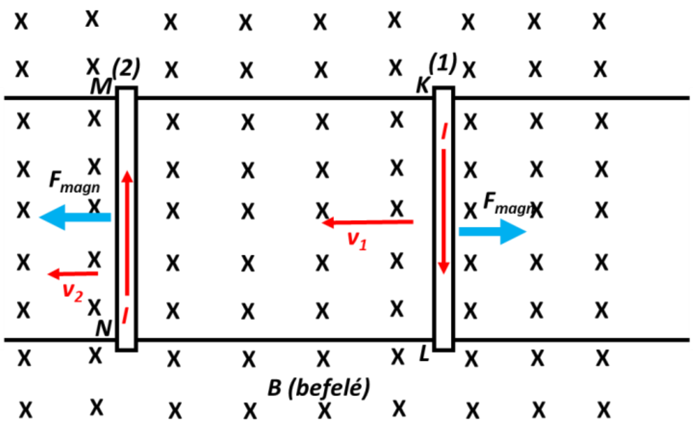
$$A_2 = 2 \cdot A_1.$$

Mivel a $\rho_{fajl.}$ fajlagos ellenállásuk és hosszuk megegyezik, a nagyobb tömegű rúd elektromos ellenállása

$$R_2 = \rho_{fajl.} \cdot \frac{l}{A_2} = \rho_{fajl.} \cdot \frac{l}{2 \cdot A_1} = \frac{R_1}{2} = 0{,}1\ \Omega$$

nagyságú, azaz feleakkora, mint a kisebb tömegű rúdé.

2 pont



A mellékelt, felülnézeti ábrán berajzoltuk, hogy a jobbkéz-szabály értelmében milyen irányú *I(t)* áram folyik a KLNMK hurokban abban a pillanatban, amikor a rudak éppen $v_2 < v_1$ nagyságú pillanatnyi sebességekkel rendelkezve mozognak. Ennek az áramnak az erőssége

$$I(t) = \frac{B \cdot l \cdot v_1(t) - B \cdot l \cdot v_2(t)}{R_1 + R_2} = \frac{B \cdot l \cdot [v_1(t) - v_2(t)]}{R_1 + R_2}$$

Ebből már látszik, hogy csak addig folyhat áram a hurokban, amig a két rúd egymáshoz viszonyított (relatív) sebessége nullára nem csökken.

Kis átalakítással olyan kifejezéshez is juthatunk, amihez az eddigiektől eltérő út is elvezethetett volna:

$$I(t)=\frac{B\cdot l\cdot v_1(t)-B\cdot l\cdot v_2(t)}{R_1+R_2}=\frac{B\cdot l\cdot\left[\frac{\Delta s_1}{\Delta t}-\frac{\Delta s_2}{\Delta t}\right]}{R_1+R_2}$$

ahol Δs_1,illetve Δs_2 a $[t, t+\Delta t]$, igen rövid időintervallumban a rudak által megtett utak hossza.

Tovább alakítva a kifejezést, kapható, hogy

$$I(t)=\frac{B\cdot(l\cdot\Delta s_1-l\cdot\Delta s_2)}{\Delta t\cdot(R_1+R_2)}=\frac{B\cdot|\Delta \mathrm{A(t)}|}{\Delta t\cdot(R_1+R_2)}=\frac{B\cdot\frac{|\Delta \mathrm{A(t)}|}{\Delta t}}{R_1+R_2}$$

Mivel $|\Delta \mathrm{A(t)}|$ a KLMNK hurok által körülfogott terület megváltozása a t időpillanat kis környezetében, láthatóan úgy is gondolkodhattunk volna, hogy a KLNMK hurok által körülfogott mágneses fluxus változási gyorsasága a t időpillanatban megadja a pillanatnyi indukált feszültséget (*Faraday* törvénye), és ennek felhasználásával is meghatározható a hurokban folyó áram aktuális erőssége.

4 pont

A vizsgált időpillanatban az egyes rudakra felírhatjuk a mozgásegyenletet:

$$\left.\begin{aligned}-B\cdot I(t)\cdot l&=m_1\cdot a_1\\ B\cdot I(t)\cdot l&=m_2\cdot a_2\end{aligned}\right\}$$

(Vonatkoztatási rendszerünk vízszintes, x tengelyét a kisebb tömegű test kezdősebességével megegyezően irányítottuk. A függőleges, y irányú erőkomponensek eredője zérus.)

Mivel igen rövid Δt időintervallumra nézve

$$\left.\begin{aligned}-B\cdot I(t)\cdot l&=m_1\cdot\frac{\Delta v_1(t)}{\Delta t}\\ B\cdot I(t)\cdot l&=m_2\cdot\frac{\Delta v_2(t)}{\Delta t}\end{aligned}\right\}$$

a két egyenletet összeadva kaphatjuk, hogy

$$m_2\cdot\frac{\Delta v_2(t)}{\Delta t}+m_1\cdot\frac{\Delta v_1(t)}{\Delta t}=0$$

illetve

$$\frac{\Delta I_2}{\Delta t}+\frac{\Delta I_1}{\Delta t}=0\ \rightarrow\frac{\Delta I_1+\Delta I_2}{\Delta t}=0\rightarrow\ \frac{\Delta(I_1+I_2)}{\Delta t}=0$$

ahol I_1 és I_2 a két rúd pillanatnyi lendületértéke.

Ez az egyenlet azt fejezi ki, hogy a rudak össz-lendületének megváltozása zérus kell, hogy legyen, azaz a rudak által alkotott rendszerben a lendületmegmaradás érvényesül.

Ebből következik, hogy

$$m_1\cdot v_0=m_1\cdot v_1(t)+m_2\cdot v_2(t)$$

minden pillanatban teljesül.

A mágneses erő a kisebb tömegű rúd sebességét egyre csökkenti, a nagyobb tömegűét folyamatosan növeli: egy adott pillanatban a két sebesség nagysága meg fog egyezni. Ebben a pillanatban az indukált áram zérusra csökken, a mágneses erők megszűnnek, a rudak gyorsulása nullára változik, azaz ezzel a közös sebességgel haladnak a továbbiakban a rudak.

A lendületmegmaradás törvényéből következően a közös sebesség értéke:

$$m_1\cdot v_0=m_1\cdot v_k+m_2\cdot v_k$$

$$v_k=\frac{m_1\cdot v_0}{m_1+m_2}=\frac{2\ g\cdot 0{,}3\ m/s}{2\ g+4\ g}=0{,}1\ \frac{m}{s}$$

Nem szükséges a formális levezetés! Elegendő az az indoklás, hogy a rudak által alkotott rendszerre ható külső erők eredője zérus, így a rendszerben érvényes a lendületmegmaradás törvénye. (Illetve tömegközéppontjának sebessége állandó.)
3 pont

a) rész összesen:
10 pont

b)
A rudak addig közelednek egymáshoz, amíg relatív sebességük zérusra nem csökken, vagyis akkor lesznek legközelebb egymáshoz, amikor egyforma,

$$v_k = 0{,}1\ \frac{m}{s}$$

nagyságú sebességgel csúsznak a síneken.
Vizsgáljuk meg pl. a nagyobb tömegű rúd – a fentiekben már felírt – mozgásegyenletét!

$$B \cdot I(t) \cdot l = m_2 \cdot a_2$$

Ez az egyenlet a következő formában is írható:

$$B \cdot \frac{B \cdot \frac{|\Delta \mathrm{A(t)}|}{\Delta t}}{R_1 + R_2} \cdot l = m_2 \cdot \frac{\Delta v_2(t)}{\Delta t}$$

Látható, hogy Δt nagyságától függetlenül érvényes, hogy

$$\frac{B^2 \cdot l \cdot |\Delta \mathrm{A(t)}|}{R_1 + R_2} = m_2 \cdot \Delta v_2(t)$$

azaz a hurok bizonyos időtartam alatt bekövetkezett területváltozásának nagysága egyenesen arányos a nagyobb tömegű rúd ezalatt elszenvedett sebességváltozásával:

$$|\Delta \mathrm{A}| = \frac{m_2 \cdot (R_1 + R_2)}{B^2 \cdot l} \cdot \Delta v_2$$

Mivel tudjuk, hogy

$$\Delta v_2 = v_k - 0 = 0{,}1\ \frac{m}{s}$$

és

$$|\Delta \mathrm{A}| = l \cdot d_0 - l \cdot d_{min}$$

kaphatjuk a végeredményt:

$$d_{min} = d_0 - \frac{m_2 \cdot (R_1 + R_2)}{B^2 \cdot l^2} \cdot v_k = 0{,}1\ m - \frac{0{,}004\ kg \cdot 0{,}3\ \Omega}{0{,}25\ T^2 \cdot 0{,}04\ m^2} \cdot 0{,}1 \frac{m}{s}$$

$$d_{min} = 0{,}1\ m - 0{,}012\ m$$

$$d_{min} = 0{,}088\ m = 8{,}8\ cm$$

Tehát legfeljebb 8,8 cm-re tudja megközelíteni a kisebb tömegű rúd a nagyobbat.

b) rész összesen (bontható): 6 pont

c)
Mialatt a rudak felveszik a közös sebességet, mechanikai energiájuk fogy, ugyanis a hurokban folyó áram Joule-hő fejlődését eredményezi az ellenállásokon, és az így kisugárzott energiamennyiségnek más forrása nem lehet. Ezt a hőmennyiséget a rudak mozgási energiájának csökkenése fedezi, azaz:

$$Q_{Joule} = |\Delta E_{mech.}| = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_0^2 - \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_k^2 - \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_k^2$$

$$Q_{Joule} = |\Delta E_{mech.}| = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_0^2 - \frac{1}{2} \cdot v_k^2 \cdot (m_1 + m_2)$$

$$Q_{Joule} = \frac{1}{2} \cdot 0{,}002\ kg \cdot 0{,}09\ \frac{m^2}{s^2} - \frac{1}{2} \cdot 0{,}01\ \frac{m^2}{s^2} \cdot 0{,}006\ kg$$

$$= 9 \cdot 10^{-5} J - 3 \cdot 10^{-5} J$$

$$Q_{Joule} = 6 \cdot 10^{-5} J$$

c) rész összesen (bontható): 4 pont

Összesen: 20 pont

Budó Ágoston Fizikai Feladatmegoldó Verseny

2021. november 18. 14.00-17.00

<u>Megoldókulcs</u>

Általános megjegyzések: A megoldókulcs elkészítésével segítséget kívánunk nyújtani a javításhoz. Igyekeztünk minél több részpontszámot megjelölni, hogy a javítás minél inkább egységes lehessen. Természetesen a megadottaktól eltérő helyes megoldásokat is el kell fogadni. Ilyen esetekben a megfelelő arányos pontozást a szaktanárokra bízzuk.

12. évfolyam, 1. feladat

a)

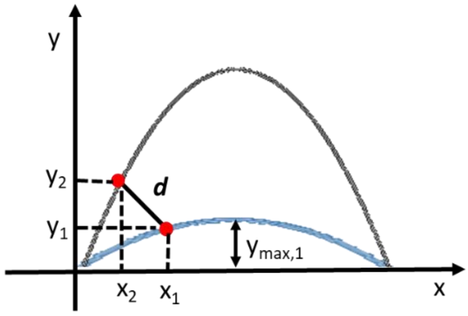
Mielőtt a ferde hajításra vonatkozó kinematikai összefüggéseket alkalmaznánk, vegyük észre, hogy a megadott szögek pótszögek, ezért

$$cos\alpha_1 = sin\alpha_2, \text{ ill. } sin\alpha_1 = cos\alpha_2$$

ahol $\alpha_1 = 15°$ és $\alpha_2 = 75°$.

(Ha nem fogalmazza meg ezt a felismerést a versenyző, de a számítások során helyesen alkalmazza, ezt a 2 pontot megkaphatja) 2 pont

A két lövedék pályájáról ábrát készíthetünk, felhasználva, hogy a pótszögek alatt eldobott testek ugyanolyan távolságban érkeznek vissza az elhajítás szintjére. A koordinátarendszerünk origója a hajítások közös kezdőpontjában lesz, *x* tengelye vízszintes, *y* tengelye függőlegesen felfelé irányított.



Az ábráról leolvasható jelöléseknek megfelelően az egyes lövedékek mozgására érvényes kinematikai összefüggések a következők:

$$\left.\begin{array}{r} x_1 = v_0 \cdot cos\alpha_1 \cdot t \\ y_1 = v_0 \cdot sin\alpha_1 \cdot t - \dfrac{g}{2} \cdot t^2 \end{array}\right\}$$

illetve

$$\left.\begin{array}{r} x_2 = v_0 \cdot cos\alpha_2 \cdot t \\ y_2 = v_0 \cdot sin\alpha_2 \cdot t - \dfrac{g}{2} \cdot t^2 \end{array}\right\}$$

Figyelembe véve a pótszögek szinuszának és koszinuszának kapcsolatát:

$$\left.\begin{array}{r} x_1 = v_0 \cdot cos\alpha_1 \cdot t \\ y_1 = v_0 \cdot sin\alpha_1 \cdot t - \dfrac{g}{2} \cdot t^2 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= v_0 \cdot sin\alpha_1 \cdot t \\ y_2 &= v_0 \cdot cos\alpha_1 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2 \end{aligned}\right\}$$

2+2=4 pont

A két lövedék között *t* időpillanatban mérhető távolság:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

azaz a pillanatnyi koordináta-különbségek négyzetösszegéből vont négyzetgyök.

2 pont

Beírva a koordinátákra vonatkozó kifejezéseket, kaphatjuk, hogy

$$d = \sqrt{(v_0 \cdot cos\alpha_1 - v_0 \cdot sin\alpha_1)^2 \cdot t^2 + (v_0 \cdot cos\alpha_1 - v_0 \cdot sin\alpha_1)^2 \cdot t^2}$$

illetve

$$d = (v_0 \cdot cos\alpha_1 - v_0 \cdot sin\alpha_1) \cdot t \cdot \sqrt{2}$$

2 pont

Vizsgáljuk meg, milyen hosszú az az időtartam, amíg mindkét test emelkedik!
Az emelkedés idejét az határozza meg, hogy mikor csökken a kezdősebesség függőleges komponense zérusra, ugyanis a ferdén elhajított test sebesség-komponenseire érvényes a következő két összefüggés:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_0 \cdot cos\alpha \\ v_y &= v_0 \cdot sin\alpha - g \cdot t \end{aligned}\right\}$$

Innen az emelkedés ideje:

$$v_{y,em} = v_0 \cdot sin\alpha - g \cdot t_{em} = 0 \;\rightarrow\; t_{em} = \frac{v_0 \cdot sin\alpha}{g}$$

Látható, hogy az adott szögeket figyelembe véve a kisebb (15°-os) szög alatt elhajított test emelkedési ideje lesz a rövidebb:

$$sin15° < sin75°$$

Így az az időintervallum, amelyben mindkét test emelkedik:

$$0 < t \le \frac{v_0 \cdot sin\alpha_1}{g}$$

2 pont

Összefoglalva: a két lövedék közötti *d* távolság a

$$0 < t \le \frac{v_0 \cdot sin\alpha_1}{g}$$

időintervallumban monoton növekszik az idővel:

$$d = v_0 \cdot \sqrt{2} \cdot (cos\alpha_1 - sin\alpha_1) \cdot t$$

vagy

$$d = v_0 \cdot t \cdot \sqrt{2 \cdot (1 - sin2\alpha_1)}.$$

Behelyettesítve a szögértéket még egyszerűbb alakhoz juthatunk:

$$d = v_0 \cdot t \cdot \sqrt{2 \cdot (1 - sin30°)} = v_0 \cdot t \cdot \sqrt{2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)} = v_0 \cdot t$$

2 pont

a) rész összesen: 14 pont

b)

Az előző részben kapott összefüggésből a két lövedék közötti d_{ll} távolság egyszerűen kapható:

$$\left.\begin{aligned} d_{ll} &= v_0 \cdot t_{em} \cdot \sqrt{2 \cdot (1 - sin2\alpha_1)} \\ t_{em} &= \frac{v_0 \cdot sin\alpha_1}{g} \end{aligned}\right\}$$

azaz

$$d_{ll} = v_0 \cdot \sqrt{2 \cdot (1 - sin2\alpha_1)} \cdot \frac{v_0 \cdot sin\alpha_1}{g}$$

$$d_{ll} = \sqrt{2 \cdot (1 - sin30°)} \cdot \frac{v_0^2 \cdot sin15°}{g} = \sqrt{2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{v_0^2 \cdot sin15°}{g}$$

tehát

$$d_{ll} = \frac{v_0^2 \cdot sin15°}{g}.$$

2 pont

A talajtól mért távolság (azaz a pálya tetőpontja), d_{lt}:

$$d_{lt} = y_{1,max} = v_0 \cdot sin\alpha_1 \cdot \frac{v_0 \cdot sin\alpha_1}{g} - \frac{g}{2} \cdot \left(\frac{v_0 \cdot sin\alpha_1}{g}\right)^2$$

$$d_{lt} = y_{1,max} = \frac{v_0^2 \cdot sin^2\alpha_1}{2 \cdot g}$$

$$d_{lt} = y_{1,max} = \frac{v_0^2 \cdot sin^2 15°}{2 \cdot g}$$

2 pont

Tehát a két távolság aránya

$$\frac{d_{lt}}{d_{ll}} = \frac{\frac{v_0^2 \cdot sin^2 15°}{2 \cdot g}}{\frac{v_0^2 \cdot sin15°}{g}} = \frac{sin15°}{2} = 0{,}1294 < 1$$

vagy

$$\frac{d_{ll}}{d_{lt}} = \frac{\frac{v_0^2 \cdot sin15°}{g}}{\frac{v_0^2 \cdot sin^2 15°}{2 \cdot g}} = \frac{2}{sin15°} = 7{,}7274 > 1,$$

azaz a vizsgált mozgásszakasz végén egymástól távolabb lesznek a lövedékek, mint amilyen magasan a 15°-ban kilőtt lövedék a talaj fölött lesz.

2 pont

b) rész összesen: 6 pont

Összesen: 20 pont

12. évfolyam, 2. feladat

a)

A test súlyán (***G***) azt az erőt értjük, amivel a test nyomja a vízszintes alátámasztási felületet, ha csak az gátolja szabadesésében. Ha a test ilyen körülmények között egyensúlyban van abban a vonatkoztatási rendszerben, amelyben a szabadesés gyorsulása g, akkor ez a súlyerő a

$$G = m \cdot g$$

összefüggéssel számítható ki. Természetesen Newton III. törvénye miatt ugyanekkora, de ellentétes irányú nyomóerőt fejt ki a vízszintes – azaz a szabadesés irányára merőleges síkú – alátámasztó felület a testre (***N***), azaz

$$|N| = |G| = m \cdot g$$

A Földön nyugvó testek az állócsillagokhoz rögzített vonatkoztatási rendszerben egyenletes körmozgást végeznek. Az Egyenlítőn nyugalomban lévő, ***m*** tömegű testre felírva a dinamika alapegyenletét:

$$\gamma \cdot \frac{M_F \cdot m}{R_E^2} - N_E^0 = m \cdot \frac{v_F^2}{R_E}$$

ahol

$$v_F = \frac{2 \cdot R_E \cdot \pi}{T_{sz}} = 465\ \frac{m}{s}$$

az Egyenlítő pontjainak (és a nyugvó testnek) a kerületi sebessége, R_E az egyenlítői földsugár, T_{sz} a Föld állócsillagokhoz viszonyított forgásideje.

Innen a nehézségi gyorsulás

$$g_0 = \frac{N_E^0}{m} = \gamma \cdot \frac{M_F}{R_E^2} - \frac{v_F^2}{R_E}$$

2 pont

Amennyiben a test az egyenlítő mentén v sebességgel mozog a talajhoz képest, mozgásegyenlete a következőképpen alakul:

$$\gamma \cdot \frac{M_F \cdot m}{R_E^2} - N_E^{K/NY} = m \cdot \frac{(v_F \pm v)^2}{R_E}$$

ahol a zárójelben összeadás van, ha a test Kelet felé, kivonás, ha Nyugat felé mozog $(v << v_F)$.

4 pont

Ennek megfelelően a nehézségi gyorsulás értéke egy Kelet felé mozgó test esetében

$$g_K = \frac{N_E^K}{m} = \gamma \cdot \frac{M_F}{R_E^2} - \frac{(v_F + v)^2}{R_E}$$

Nyugat felé mozgó test esetében

$$g_{NY} = \frac{N_E^{NY}}{m} = \gamma \cdot \frac{M_F}{R_E^2} - \frac{(v_F - v)^2}{R_E}.$$

2 pont

A nyugalomban lévő hajón mérhető nehézségi gyorsulás-értéktől való eltérés egy v sebességgel mozgó hajón

$$\Delta g = g_{K/NY} - g_0$$

tehát pozitív, amennyiben a hajó Nyugat felé,

$$\Delta g = g_{NY} - g_0 = \gamma \cdot \frac{M_F}{R_E^2} - \frac{(v_F - v)^2}{R_E} - \gamma \cdot \frac{M_F}{R_E^2} + \frac{v_F^2}{R_E}$$

$$\Delta g = g_{NY} - g_0 = \frac{2 \cdot v_F \cdot v - v^2}{R_E} = \frac{v \cdot (2 \cdot v_F - v)}{R_E}$$

negatív, amennyiben Kelet felé mozog:

$$\Delta g = g_K - g_0 = \gamma \cdot \frac{M_F}{R_E^2} - \frac{(v_F + v)^2}{R_E} - \gamma \cdot \frac{M_F}{R_E^2} + \frac{v_F^2}{R_E}$$

2 pont

$$\Delta g = g_K - g_0 = -\frac{2 \cdot v_F \cdot v + v^2}{R_E} = -\frac{v \cdot (2 \cdot v_F + v)}{R_E}.$$

(Amiről beszélünk, az ún. Eötvös–effektus. Eötvös Loránd adta meg annak a jelenségnek a magyarázatát, hogy a kelet felé haladó testek súlya csökken, a nyugat felé haladóké nő a nyugvó helyzethez képest.)

A graviméter méréseit tanulmányozva látható, hogy a hajó pályájának két szakaszán mutatkozik pozitív, egy szakaszon negatív eltérés a nyugalmi állapotban mért g értéktől. Ebből következik, hogy a mozgás során a hajónak két útszakaszon kell nyugati irányú sebesség-összetevővel rendelkeznie, és egy szakaszon rendelkezhet keleti irányú sebességkomponenssel. Ez viszont csak úgy lehetséges, ha a DCBA irányban mozog, azaz az Egyenlítő mentén nyugat felé kellett haladnia. **2 pont**

a) rész összesen: 12 pont

b)

Oldjuk meg a CB szakaszra felírt egyenletet, figyelembe véve, hogy a grafikonról leolvashatóan

$$\Delta g = g_{NY} - g_0 = 75\, mgal = 75 \cdot 10^{-5}\, m/s^2\,!$$

Tehát mivel

$$\Delta g = g_{NY} - g_0 = \gamma \cdot \frac{M_F}{R_E^2} - \frac{(v_F - v)^2}{R_E} - \gamma \cdot \frac{M_F}{R_E^2} + \frac{v_F^2}{R_E}$$

$$\Delta g = \frac{2 \cdot v_F \cdot v - v^2}{R_E}$$

kaphatjuk, hogy

$$v^2 - 2 \cdot v_F \cdot v + R_E \cdot \Delta g = 0$$

$$v^2 - 2 \cdot 465 \cdot v + 6{,}378 \cdot 10^6 \cdot 75 \cdot 10^{-5} = 0$$

A másodfokú egyenletet megoldva

$$v = \frac{930 \pm 919{,}66}{2},$$

amiből a fizikailag („hajózástechnikailag”) értelmes megoldás

$$v = \frac{930 - 919{,}66}{2} = 5{,}17\,\frac{m}{s} = 18{,}6\,\frac{km}{h}$$

Tehát a hajó sebessége 18,6 km/h volt, miközben az Egyenlítő mentén nyugat felé haladt.

b) rész összesen: 4 pont

c)

A BC távolság 20’, és mivel az Egyenlítő kerülete 360°-nak felel meg:

$$d_{BC} = \frac{1/3\, fok}{360\, fok} \cdot 2 \cdot R_E \cdot \pi = 37{,}1\, km$$

A távolság megtételéhez szükséges idő:

$$\Delta t = \frac{d_{BC}}{v} = 7177\, s = 1{,}99\, h \approx 2\, h$$

Tehát körülbelül 2 órán keresztül mozgott az Egyenlítőn a hajó.

c) rész összesen: 4 pont

Összesen: 20 pont

12. évfolyam, 3. feladat

a) (*A megoldásban a szem szaruhártya+szemlencse leképező rendszerét egyetlen vékony lencseként vesszük figyelembe, rendszerint csak „szemlencséről”, vagy „szemről” beszélünk.*)
A törőerősség a méterekben kifejezett fókusztávolság reciproka, ami a leképezési (vagy távolság-, lencse-) törvény szerint

$$D = \frac{1}{f} = \frac{n}{t} + \frac{n'}{k}$$

összefüggésben áll a *k* képtávolsággal és a *t* tárgytávolsággal, ahol *n* a tárgytér, *n'* a kép-tér közegének törésmutatója, (Szem esetében a tárgytér általában levegő, ahol *n* =1, a kép-tér az üvegtest, melynek törésmutatója kb. *n'* =1,33, a *k* képtávolság pedig kb. a szemgolyó átmérője, nagyjából 17 mm.)
A középiskolában tanultakat figyelembe véve nem hiba, ha valaki a leképezési törvény felírásánál a törésmutató-különbségeket figyelmen kívül hagyja, vagyis

$$D = \frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k}$$

alakot használ a gondolatmenete során!

A továbbiakban mindenütt el kell fogadni helyes kifejezésként a leképezési törvénynek ezt, a középiskolában tanult alakját.

A feladat szövege szerint az egészséges szem lencséje relaxált sugárizmok esetében a végtelen távoli ($t_t = \infty$) tárgyakról ad éles képet, ugyanakkor maximális megerőltetés mellett a $t_k = 20\,cm$ távolságban lévő pont retinára történő leképezésére is képes. (Ezt úgy is szokták fogalmazni, hogy az egészséges szem távolpontja a végtelenben, közelpontja – 45 éves korban – 20 cm-es távolságban van.)
A távolságtörvényt a két esetre felírva kaphatjuk, hogy

$$\left.\begin{aligned} D_t &= \frac{n}{t_t} + \frac{n'}{k} \\ D_k &= \frac{n}{t_k} + \frac{n'}{k} \end{aligned}\right\} \rightarrow \Delta D_{max} = D_k - D_t = \frac{1}{t_k} - \frac{1}{t_t} = \frac{1}{t_k} - \frac{1}{\infty} = \frac{1}{t_k}$$

tehát

$$\Delta D_{max} = D_k - D_t = \frac{1}{t_k} = \frac{1}{0{,}2\,m} = 5\,\frac{1}{m}$$

Eszerint az egészséges szem lencséje legfeljebb 5 dioptriával tud alkalmazkodni, ekkora változás következhet be a lencse törőerősségében, miközben az élesen látható legtávolabbi tárgyakról átvált a legközelebb lévők megfigyelésére.

3 pont

Az egészséges szemnek a tisztalátás távolságában ($d_0 = 25\,cm$) lévő tárgy nézéséhez szükséges törőerősség-változása a maximális akkomodációs értéknél kisebb:

$$\left.\begin{aligned} D_t &= \frac{n}{t_t} + \frac{n'}{k} \\ D_{tiszta} &= \frac{n}{d_0} + \frac{n'}{k} \end{aligned}\right\} \rightarrow \Delta D_{tiszta} = D_{tiszta} - D_t = \frac{1}{d_0} - \frac{1}{t_t} = \frac{1}{d_0} - \frac{1}{\infty} = \frac{1}{d_0}$$

$$\Delta D_{tiszta} = 4\,\frac{1}{m}$$

3 pont

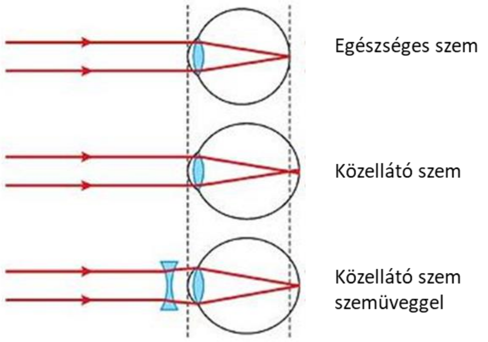
a) rész összesen: 6 pont

b)

Az elvárható megoldás:

Feri közellátó (rövidlátó), mert csak a közeli tárgyakat látja élesen, a távolban lévők látásához szemüveget kell viselnie. A közellátás (rövidlátás) oka, hogy *a szemgolyó tengelyhossza a normálisnál nagyobb,* emiatt a szemlencse a távolból érkező párhuzamos fénysugarakat a retina előtt egyesíti.

A feladat szövegéből kiderül, hogy Feri közellátása tengelyi eredetű, nem a szemlencse töréshibájából ered.
2 pont



Mivel Feri 45 éves, és szeme ugyanúgy akkomodálódik, mint egy egészséges szem, – az előbbiek értelmében – szemlencséje maximum ΔD_{max}= 5 dioptria nagyságú alkalmazkodásra képes. Ugyanakkor relaxált lencsével, ellazult szemizmok mellett csak az 50 cm-re lévő tárgyakat látja élesen, más szóval távolpontja a végtelen helyett $t_{F,t} = 50\ cm$ távolságban van.
Ebből már ki tudjuk számítani, hogy legfeljebb milyen közel eső (($t_{F,k}$) tárgyról képes Feri szemlencséje éles képet előállítani, ugyanis

$$\left.\begin{aligned} D_{F,t} &= \frac{n}{t_{F,t}} + \frac{n'}{k} \\ D_{F,k} &= \frac{n}{t_{F,k}} + \frac{n'}{k} \end{aligned}\right\} \rightarrow \Delta D_{max} = D_{F,k} - D_{F,t} = \frac{1}{t_{F,k}} - \frac{1}{t_{F,t}} = 5\ \frac{1}{m}$$

$$\frac{1}{t_{F,k}} = \frac{1}{t_{F,t}} + 5\ \frac{1}{m}$$

$$\frac{1}{t_{F,k}} = \frac{1}{0{,}5\ m} + 5\ \frac{1}{m}$$

$$\frac{1}{t_{F,k}} = 2\ \frac{1}{m} + 5\ \frac{1}{m}$$

$$t_{F,k} = 0{,}1429\ m = 14{,}29\ cm$$

Tehát Feri szemüveg nélkül a 14,29 cm és 50 cm (kb. 14 cm és 50 cm) között elhelyezkedő tárgyakról lát éles képet. **3 pont**

Ha szemüveg nélkül olvas, a könyvet $d_{F,tiszta}$ távolságban tartva, akkor szemlencséje akkomodált állapotban van, még ha nem is a maximálisan elérhető 5 dioptriával, hanem csak 4 dioptriával. Ezért a lencsetörvényt ismételten felírva Feri relaxált állapotú, és 4 dioptriával alkalmazkodott szemére nézve:

$$\left.\begin{aligned} D_{F,t} &= \frac{n}{t_{F,t}} + \frac{n'}{k} \\ D_{F,tiszta} &= \frac{n}{d_{F,tiszta}} + \frac{n'}{k} \end{aligned}\right\} \rightarrow \Delta D_{tiszta} = D_{F,tiszta} - D_{F,t} = \frac{1}{d_{F,tiszta}} - \frac{1}{t_{F,t}}$$

$$\Delta D_{tiszta} = \frac{1}{d_{F,tiszta}} - \frac{1}{t_{F,t}} = 4\ \frac{1}{m}$$

$$\frac{1}{d_{F,tiszta}} = \frac{1}{t_{F,t}} + \Delta D_{tiszta} = \frac{1}{0{,}5\ m} + 4\ \frac{1}{m}$$

$$\frac{1}{d_{F,tiszta}} = 6\,\frac{1}{m} \rightarrow d_{F,tiszta} = 0{,}1667\,m = 16{,}67\,cm$$

Tehát szemüveg nélküli olvasásnál Ferinek 16,67 cm (kb. 17 cm) távolságban kell tartania szemétől az olvasott könyvet. **3 pont**

Összefoglalva: Feri *szemüveg nélkül* a szemétől mért kb. 14 cm és 50 cm távolságban lévő pontok között elhelyezkedő tárgyakat képes élesen látni, tartósabb igénybevétel, pl. olvasás esetén pedig kb. 17 cm-re kell tartania szemétől a tanulmányozott szöveget.

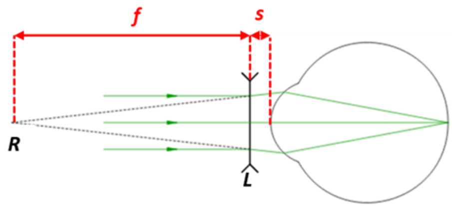
b) rész összesen: 8 pont

c)

Mivel a „végtelenben lévő tárgyról érkező”, azaz párhuzamos fénysugarakat a közellátó szem lencséje a retina előtt egyesíti, a szemüveglencsének széttartóvá kell tennie a párhuzamosan rá eső sugarakat, tehát a látáshiba javítására szolgáló szemüvegnek szórólencsének kell lennie (ennek a megoldásból is ki kell derülnie, f<0 kell, hogy adódjon).

Tűzzük ki célul, hogy a szemüvegnek a távolpontot a végtelenbe kell „kitolnia”, vagyis azt szeretnénk elérni, hogy relaxált szemmel a távoli tárgyakat élesen láthassa Feri! Mivel alkalmazkodásmentes szemmel 50 cm-re tud élesen látni, a végtelen távoli tárgyakat „ide kellene hozni”!

Ez úgy valósítható meg, hogy *a szemüveglencsének egy végtelen távolban lévő tárgyról Feri szemétől 50 cm távolságban kell virtuális képet alkotnia!* (*A szemüvegen keresztül nem a tárgyat nézzük, hanem a tárgy szemüveg által alkotott képét!*)



A mellékelt ábráról számítások nélkül belátható, hogy a korrekciós lencse fókusztávolságának meg kell egyeznie a Feri szemétől 50 cm-re lévő R pontnak a szemüveg lencséjétől mért távolságával.

Ebből adódik, hogy

$$|f_{szemüveg}| = t_{F,t} - s$$

ahol s a szem szaruhártyája és a szemüveg lencséje közötti távolság. Mivel a feladat szövege szerint a szemüveg lencséi közel esnek Feri szeméhez

$$|f_{szemüveg}| = t_{F,t} = 0{,}5\,m$$

azaz

$$D_{szemüveg} = \frac{1}{f_{szemüveg}} = (-)\,2\,\frac{1}{m}$$

Tehát - 2 dioptriás szórólencséjű szemüveget visel Feri.

A távolságtörvénybe történő formális behelyettesítéssel is elérhetjük ezt az eredményt, és akkor az előjel is adódik, tükrözve a lencse típusát. Alkalmazzuk a lencsetörvényt a következő adatokra:

$$\left.\begin{matrix} k = t_{F,t} = -0{,}5\,m \\ t = \infty \end{matrix}\right\}$$

$$D_{szemüveg} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{\infty} + \frac{1}{-0{,}5\,m} \rightarrow D_{szemüveg} = -2\,\frac{1}{m}$$

Amikor tehát ilyen törőerejű szemüveg van Ferin, *alkalmazkodásmentes szemmel* élesen látja a végtelen távol lévő tárgyakat. **3 pont**

Ha viszont ezt a lencsét (illetve a szemüvegét) állandóan viseli Feri, akkor számára a tisztalátás távolsága már nem 16,67 cm lesz, továbbá szemüvegesen módosul a legközelebbi, még élesen leképezhető tárgy távolsága is!

Legyen a még élesen leképezhető tárgy megváltozott távolsága Feri szemétől $t_{F,k,sz}$! A szemüvegnek ezt a pontot a szemtől – és egyúttal a szemüveglencsétől – mérve 14,29 cm-es távolságba kell leképeznie. Virtuális a kép, azaz az adatok:

$$\left.\begin{aligned} k = t_{F,k} = -0{,}1429\,m \\ t = t_{F,k,sz} \end{aligned}\right\}$$

A szemüveglencsére felírva a lencsetörvényt:

$$D_{szemüveg} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k} \rightarrow \frac{1}{t_{F,k,sz}} + \frac{1}{-0{,}1429\,m} = -2\,\frac{1}{m}$$

$$\frac{1}{t_{F,k,sz}} = 7\,\frac{1}{m} - 2\,\frac{1}{m} = 5\,\frac{1}{m}$$

$$t_{F,k,sz} = 0{,}2\,m$$

Tehát szemüvegben Feri közelpontja 20 cm távolságba „kitolódik”.

Határozzuk meg a tisztalátás távolságának $d_{F,tiszta,sz}$ módosult értékét is! Az előbbi eljáráshoz hasonlóan:

$$\left.\begin{aligned} k = d_{F,tiszta} = -0{,}1667\,m \\ t = d_{F,tiszta,sz} \end{aligned}\right\}$$

A szemüveglencsére felírva a lencsetörvényt:

$$D_{szemüveg} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k} \rightarrow \frac{1}{d_{F,tiszta,sz}} + \frac{1}{-0{,}1667\,m} = -2\,\frac{1}{m}$$

$$\frac{1}{d_{F,tiszta,sz}} = 6\,\frac{1}{m} - 2\,\frac{1}{m} = 4\,\frac{1}{m}$$

$$d_{F,tiszta,sz} = 0{,}25\,m$$

Tehát szemüvegben Feri tisztalátási távolsága 25 cm („ideális, normális”) távolságba kitolódik.

Összefoglalva: *szemüvegben* Feri a szemétől mért 20 cm-es távolságnál messzebb (egészen a „végtelenig”) eső tárgyakat élesen látja, tartósabb igénybevétel esetén pedig szemétől 25 cm-re kell tartania a tanulmányozott dolgot. (Természetesen továbbra is olvashat Feri úgy, hogy szemüvegét levéve szemétől 16 cm távolságban tartja a könyvet, ill. az olvasott szöveget.) **3 pont**

c) rész összesen: 6 pont

Más megoldás a c) kérdésre:

Kihasználva, hogy egymáshoz közel eső vékony lencsék törőerősségei összeadódnak, a következő módon is megválaszolhatók a felvetett kérdések.

Legyen Feri szemlencséjének dioptriája relaxált állapotban $D_{F,t}$! Akkor a szemüveg nélküli távolpontra felírható, hogy

$$D_{F,t} = \frac{n}{t_{F,t}} + \frac{n'}{k}$$

Amikor szemüvegben „végtelen távoli” ($t_t = \infty$) tárgyakat néz:

$$D_{szemüveg} + D_{F,t} = \frac{n}{t_t} + \frac{n'}{k}$$

A két egyenletet kivonva egymásból:

$$D_{szemüveg} = \frac{n}{t_t} - \frac{n}{t_{F,t}} = \frac{1}{t_t} - \frac{1}{t_{F,t}}$$

$$D_{szemüveg} = \frac{1}{t_t} - \frac{1}{t_{F,t}} = \frac{1}{\infty} - \frac{1}{0{,}5\,m} = -2\,\frac{1}{m}$$

Tehát Ferinek -2 dioptriás szórólencséjű szemüveget kell viselnie.

A legközelebbi tárgy, amit Feri szemüveg-használat melletti élesen láthat:

Ennek a megoldásnak a pontértéke megegyezik a c) részre adható 6 ponttal, természetesen bontható.

$$\left.\begin{aligned} D_{F,k} &= \frac{n}{t_{F,k}} + \frac{n'}{k} \\ D_{szemüveg} + D_{F,k} &= \frac{n}{t_{F,k,sz}} + \frac{n'}{k} \end{aligned}\right\} \rightarrow \ D_{szemüveg} = \frac{1}{t_{F,k,sz}} - \frac{1}{t_{F,k}} = -2\ \frac{1}{m}$$

$$\frac{1}{t_{F,k,sz}} = \frac{1}{t_{F,k}} - 2\ \frac{1}{m}$$

$$\frac{1}{t_{F,k,sz}} = \frac{1}{0{,}1429\ m} - 2\ \frac{1}{m} = 7\frac{1}{m} - 2\ \frac{1}{m} = \ 5\ \frac{1}{m}$$

$$t_{F,k,sz} = 0{,}2\ m$$

Tehát a legközelebbi tárgyak, amiket Feri szemüveg-használat mellett élesen láthat, 20 cm távolságban vannak a szemétől.

Végül a tisztalátás-távolsága Feri számára szemüvegben:

$$\left.\begin{aligned} D_{F,tiszta} &= \frac{n}{d_{F,tiszta}} + \frac{n'}{k} \\ D_{szemüveg} + D_{F,tiszta} &= \frac{n}{d_{F,tiszta,sz}} + \frac{n'}{k} \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \ D_{szemüveg} = \frac{1}{d_{F,tiszta,sz}} - \frac{1}{d_{F,tiszta}} = -2\ \frac{1}{m}$$

$$\frac{1}{d_{F,tiszta,sz}} = \frac{1}{d_{F,tiszta}} - 2\ \frac{1}{m}$$

$$\frac{1}{t_{F,k,sz}} = \frac{1}{0{,}1667\ m} - 2\ \frac{1}{m} = 6\frac{1}{m} - 2\ \frac{1}{m} = \ 4\ \frac{1}{m}$$

$$t_{F,k,sz} = 0{,}25\ m$$

Azaz szemüvegben Ferinek 25 cm távolságban kell tartania az olvasott könyvet.

Összesen:
20 pont

12. évfolyam, 4. feladat

a)
A gyorsítási szakaszra felírható a munkatétel:

$$q \cdot U = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

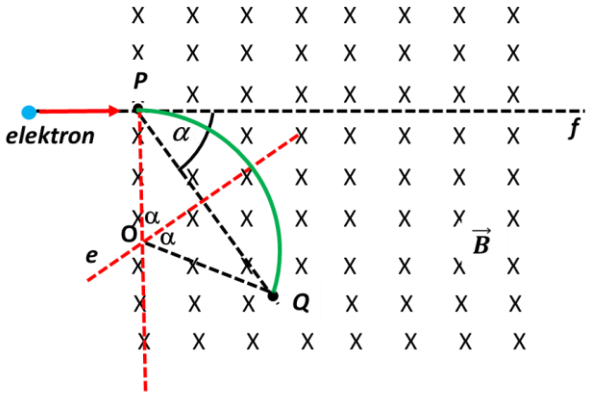
A mágneses mezőbe lépés sebessége innen:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot q \cdot U}{m}} = 2{,}965 \cdot 10^7 \ \frac{m}{s}$$

2+1=3 pont

A mágneses mező hatása miatt az elektronok olyan körpályára térülnek, melynek középpontja a *PQ* szakasz felező merőlegesének és a *P* pontban az *f* egyenesre emelt merőlegesnek a metszéspontja (*O*), sugara pedig

$$OP = R = \frac{d_{PQ}}{2 \cdot sin\alpha} = \frac{0{,}08\ m}{\sqrt{3}} = 4{,}62\ cm = 0{,}0462\ m$$



3 pont

A körpályán mozgó elektronra (mivel a gravitációs erő hatása elhanyagolható) a mágneses Lorentz-erő hat, ami merőleges lévén a sebességére, annak csak irányát változtatja meg. Így az elektron mozgásegyenlete:

$$q \cdot v \cdot B = m \cdot a_{cp} \ \rightarrow q \cdot v \cdot B = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

ahonnan

$$B = \frac{m \cdot v}{q \cdot R} = \frac{m \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot q \cdot U}{m}}}{q \cdot \frac{d_{PQ}}{2 \cdot sin\alpha}} = \frac{2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot U}{q}} \cdot sin\alpha}{d_{PQ}} = \sqrt{\frac{8 \cdot m \cdot U \cdot sin^2\alpha}{q \cdot d_{PQ}^2}}$$

$$B = \frac{m \cdot v}{q \cdot R} = \sqrt{\frac{8 \cdot m \cdot U \cdot sin^2\alpha}{q \cdot d_{PQ}^2}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ kg \cdot 2560\ V \cdot 0{,}75}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C \cdot 0{,}08^2\ m^2}}$$

$$B = 3{,}65 \cdot 10^{-3}\ T$$

A mágneses indukcióvektor nagyságának tehát *3,65 mT*-nak kell lennie.

2+1=3 pont

A jobbkéz-szabálynak megfelelően – figyelembe véve, hogy az elektron elektromos töltése negatív! – a mágneses indukcióvektornak *a papír síkjára merőlegesen befelé* kell mutatnia.

1 pont

a) rész összesen: 10 pont

b)
Az elektron pályája a mágneses mezőbe lépéstől a detektorba történő becsapódásig egy olyan, $R=OP$ sugarú körív, melyhez tartozó középponti szög 120° (lásd az ábrát). Így a pálya ívhossza (azaz az elektron által megtett út):

$$s = \frac{2 \cdot R \cdot \pi}{3} = \frac{2 \cdot \frac{d_{PQ}}{2 \cdot sin\alpha} \cdot \pi}{3} = \frac{d_{PQ} \cdot \pi}{3 \cdot sin\alpha} = 9{,}67 \cdot 10^{-2}\ m$$

2 pont

Mivel a sebesség nagysága állandó, ennek az ívnek a befutásához

$$t = \frac{s}{v} = \frac{d_{PQ} \cdot \pi}{3 \cdot sin\alpha \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot q \cdot U}{m}}} = \frac{9{,}67 \cdot 10^{-2}\ m}{2{,}965 \cdot 10^{7}\ \frac{m}{s}} = 3{,}26 \cdot 10^{-9}\ s$$

időre van szüksége az elektronnak.
(Esetleg használható a keringési időre érvényes összefüggés, ami például a következőképpen kapható a mozgásegyenletből:

$$q \cdot v \cdot B = m \cdot v \cdot \omega \ \rightarrow\ q \cdot B = m \cdot \frac{2 \cdot \pi}{T} \ \rightarrow T = \frac{2 \cdot \pi \cdot m}{q \cdot B}$$

Ebből

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot m}{q \cdot B} = 9{,}79 \cdot 10^{-9}\ s$$

amiből az egyharmad-kerület megtételéhez szükséges idő természetesen ismét

$$t = \frac{T}{3} = 3{,}26 \cdot 10^{-9}\ s$$

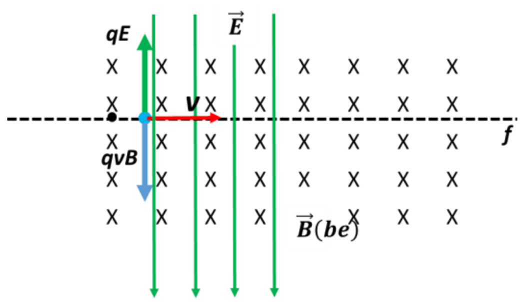
A keringési idő képletének indoklás, levezetés nélkül – pl. táblázat alapján – történő használata nem teljesértékű megoldás!)

3 pont
b) rész összesen: 5 pont

c)
Az elektronok akkor nem térülnek el, ha a rájuk ható erők eredője zérus lesz, vagyis, az elektromos mező által kifejtett erőnek a mágneses Lorentz-erővel megegyező nagyságúnak, de azzal ellentétes irányúnak kell lennie. **1 pont**
Ebből – figyelembe véve, hogy a negatív töltésű elektronra a térerősséggel ellentétes irányú erő hat – következik a létrehozandó elektromos térerősségvektor iránya, és a nagysága is:

$$q \cdot v \cdot B = q \cdot E \ \rightarrow\ v \cdot B = E$$
$$E = v \cdot B = 1{,}08 \cdot 10^{5}\ \frac{N}{C}$$

Tehát az elektromos mező térerősségvektora $1{,}08 \cdot 10^{5}\ N/C$ nagyságú, és az ábrán jelzett, vagyis „felülről lefelé" irányuló kell, hogy legyen. (Pontosabban kifejezve: $\vec{v}$, $\vec{E}$ és $\vec{B}$ ebben a sorrendben jobbsodrású rendszert kell, hogy alkosson.)



4 pont

c) rész összesen: 5 pont

Összesen: 20 pont