Budó Ágoston Fizikai Feladatmegoldó Verseny
2018/2019 tanév
2018.11.08. 14.00-17.00.
9. évfolyam feladatainak megoldásai

A javítási útmutatóban minden feladathoz adunk egy megoldást. Maximális pontszám (vagy megfelelő részpontszám) adható bármely más, helyes, követhetően lejegyzett megoldásért is.

1. Feladat:

1. Egy széles folyó közepén lehorgonyzott bolyától egyszerre indul el két olyan csónak, amelyek egyenlő hosszúságú kötelekkel vannak a bolyához kötve. A partról nézve egymásra merőlegesen halad a két csónak. Az egyik csónak a parttal párhuzamosan halad, a másik pedig a folyó partja felé tart. Amikor megfeszülnek a kötelek, mindkét csónak visszafordul. A csónakok sebessége álló vízben 1.2-szerese lenne a folyó sebességének. Adjuk meg a csónakok indulásától a bolyához való visszaérkezésig eltelt idők arányát!

Megoldás:

Jelölje L a visszafordulásig megtett utat. Az első csónak, ami a folyó áramlási irányával megegyező irányban indult t_{11} idő elteltével fordul vissza: $t_{11}=\frac{L}{v'+u}$. (3p)

ahol v’ a csónak sebessége a vízhez képest, u pedig a víz sebessége.

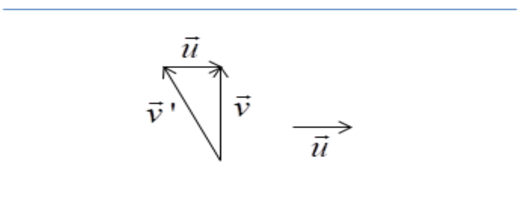
Amíg újból a bolyához ér, t_{12} idő telik el (ekkor már árral szemben halad): $t_{12}=\frac{L}{v'-u}$. (3p)

Az első csónak tehát t_1 idő alatt teszi meg az oda-vissza utat:

$$t_1=\frac{L}{v'+u}+\frac{L}{v'-u}=\frac{2\cdot L\cdot v'}{v'^2-u^2}=\frac{2\cdot L\cdot 1{,}2\cdot u}{1{,}44\cdot u^2-u^2}=\frac{2{,}4\cdot L}{0{,}44\cdot u} \quad . \qquad (3p)$$

A második csónak a folyó szemközti partja felé indul. Mivel a partra merőleges irányban mozog, a vízhez képest mért v’ sebessége szöget zár be ezzel a merőleges irányú v sebességgel:

$$\vec{v}=\vec{v}\,'+\vec{u} \qquad (1p)$$



(1p)

Ekkor: $v=\sqrt{v'^2-u^2}$. (3p)

Ugyanez igaz lesz akkor is, amikor visszafelé halad a csónak. A második csónak tehát t_2 idő után ér vissza a bolyához:

$$t_2=\frac{2\cdot L}{\sqrt{v'^2-u^2}}=\frac{2\cdot L}{u\cdot\sqrt{1{,}44-1}}=\frac{2\cdot L}{u\cdot\sqrt{0{,}44}} \qquad (3p)$$

Ezekből tehát az indulástól a visszaérkezésig eltelt idők aránya:

$$\frac{t_2}{t_1}=\frac{\frac{2{,}4\cdot L}{0{,}44\cdot u}}{\frac{2\cdot L}{u\cdot\sqrt{0{,}44}}}=1{,}809 \qquad (3p)$$

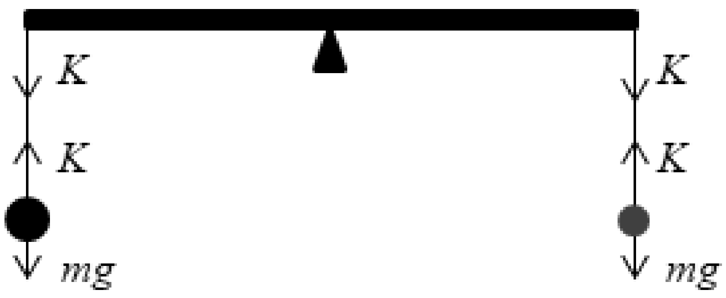
2. Feladat:

Egy rúd két végére egy-egy azonos tömegű, de eltérő anyagú fémgömböt akasztunk. A rúd középen alá van támasztva, így a ráakasztott gömbökkel egyensúlyban van. Amikor az egyik fémgömböt vízbe, a másikat pedig $800\frac{kg}{m^3}$ sűrűségű olajba merítjük, a rúd ismét egyensúlyba kerül. Adjuk meg a két gömb sűrűségének arányát! Mi történik az egyenlő karú mérleggel, ha felcseréljük a két folyadékot?.

Megoldás:

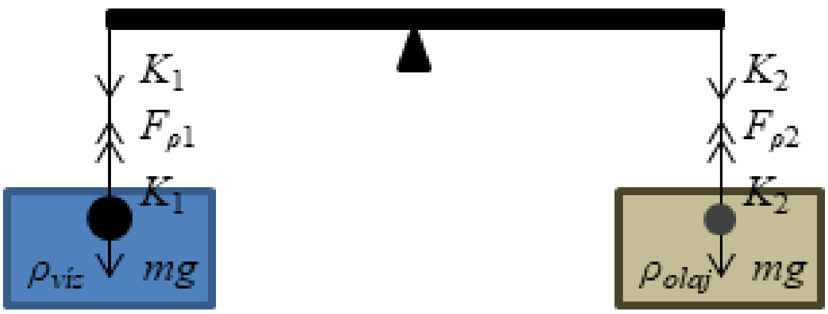
Jelöljük az egyes gömbök sűrűségét rendre ρ_1 és ρ_2 -vel.

A rúd végeire hat a kötélerő. Amikor a gömbök levegőben vannak, ez megegyezik a súlyerővel:



$K=m\cdot g$

Amikor a golyókat vízbe/olajba merítjük, akkor már hat a felhajtóerő is.



Ekkor a kötélerők:

$K_1=m\cdot g-F_{\rho 1}$

$K_2=m\cdot g-F_{\rho 2}$

Mivel a rúd egyensúlyban van, és az alátámasztás a közepén van, így a két kötélerő megegyezik: $K_1=K_2$. (5p)

Ebből következik, hogy: $m\cdot g-F_{\rho 1}=m\cdot g-F_{\rho 2}$,

illetve:

$F_{\rho 1}=F_{\rho 2}$

$\rho_{víz}\cdot V_1\cdot g=\rho_{olaj}\cdot V_2\cdot g$

$\rho_{víz}\cdot V_1=\rho_{olaj}\cdot V_2$

$\rho_{víz}\cdot\frac{m}{\rho_1}=\rho_{olaj}\cdot\frac{m}{\rho_2}$

$\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{\rho_{olaj}}{\rho_{víz}}=\frac{800}{1000}=\frac{4}{5}$ (7p)

A folyadékok felcserélése után:

Az első testre, az ábra szerinti bal oldalon ható felhajtóerő: $F'_{fel,1}=\rho_{olaj}\cdot V_1\cdot g=\rho_{olaj}\cdot g\cdot\frac{m}{\rho_1}$

A második testre, az ábra szerinti jobb oldalon ható felhajtóerő: $F'_{fel,2}=\rho_{víz}\cdot V_2\cdot g=\rho_{víz}\cdot g\cdot\frac{m}{\rho_2}$

$\frac{F'_{fel,1}}{F'_{fel,2}}=\frac{\rho_{olaj}\cdot\rho_2}{\rho_{víz}\cdot\rho_1}=0{,}8\cdot 0{,}8=0{,}64$

A bal oldalon fellépő erők: $K'_1=m\cdot g-F'_{fel,1}$

A jobb oldalon fellépő erők: $K'_2=m\cdot g-F'_{fel,2}$

Mivel a bal oldalon lévő testre kisebb felhajtóerő hat, mint a baloldali testre, ezért a bal oldalon fellépő kötélerő nagyobb, tehát abba az irányba fog elbillenni a mérleg. (8p)

3. Feladat:

Az adventi és a karácsonyi időszakban Gipsz Jakab 45 egyforma, 100 égőből álló fényfüzért használ a házának és a kertjének a díszkivilágításához. Mindegyik fényfüzér 40 W teljesítményű. Jakab 40 napon keresztül használja a díszkivilágítást, amely naponta átlagosan 7 órán keresztül üzemel.

a) Határozza meg az egyes fényfüzérek ellenállását! (Jakab az USA-ban él, ahol 110 V a hálózati feszültség.)

b) Határozza meg kWh-ban, hogy mennyi energiát használt fel a díszkivilágítása a 40 nap alatt!

c) Ha 1kWh elektromos energia ára 12 cent, akkor mennyit fizet Jakab a kivilágítás áramfelhasználásáért?

Megoldás:

a) Minden egyes fényfüzér esetén felírható a füzér teljesítményérte: $P_i = \dfrac{U^2}{R_i}$ (5pont)

Ebből a keresett ellenállásérték: $R_i = \dfrac{U^2}{P_i} = \dfrac{110^2}{40} = 302{,}5\,\Omega$ (5pont)

b) Az elektromos munka kiszámítható a teljesítményből és a munkavégzés idejéből:

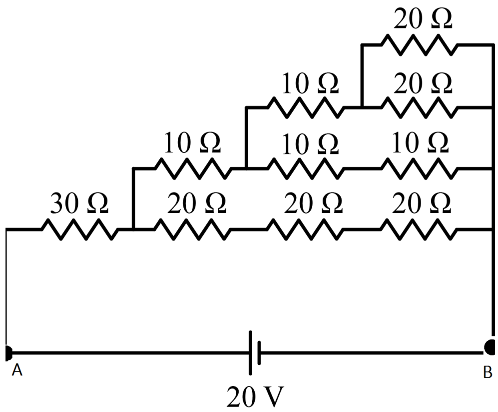
$W = P \cdot t = 45 \cdot P_i \cdot t = 45 \cdot 40\mathrm{W} \cdot 40 \cdot 7\mathrm{h} = 504000\mathrm{Wh} = 504\,kWh$ (5pont)

A kért mértékegységbe történő átváltás elmaradása: 2 pont veszteség.

c) Jakab áramfogyasztásának kiszámítása: $504\,kWh \cdot 12\,cent = 6048\,cent = \$\,60{,}48$. (5pont)

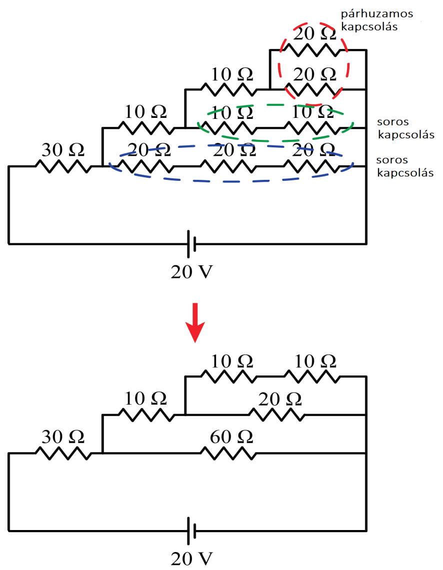
4. Feladat:

Mennyi az A és B pontok között az eredő ellenállás értéke?



Megoldás:

Az eredő ellenállás kiszámításának egy lehetséges lépéssorozata:

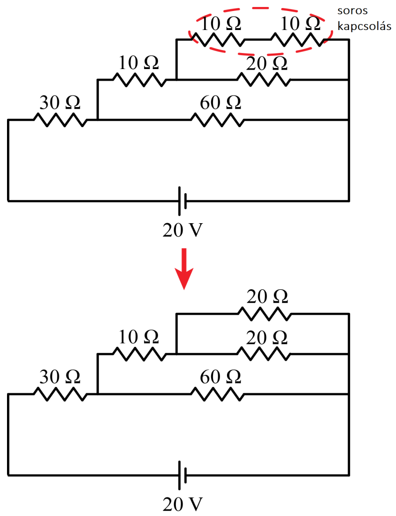


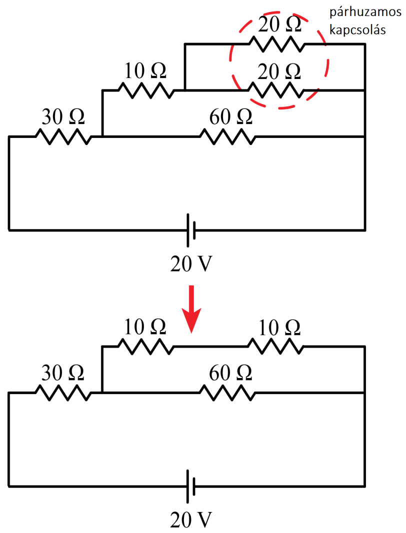
A két, párhuzamosan kapcsolt 20 W-os ellenállás eredő ellenállása: $\dfrac{1}{R_e} = \dfrac{1}{20\,\Omega} + \dfrac{1}{20\,\Omega} = \dfrac{1}{10\,\Omega}$

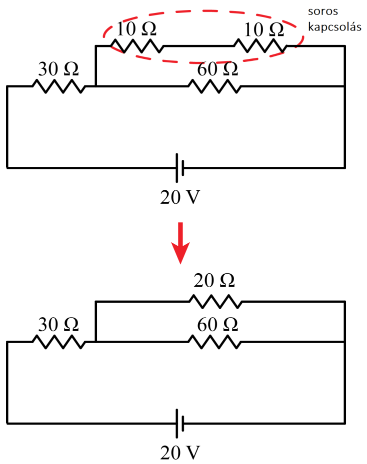
$R_e = 10\,\Omega$

A két, sorosan kapcsolt 10 W-os ellenállás eredő ellenállása: $R_e = 10\,\Omega + 10\,\Omega = 20\,\Omega$

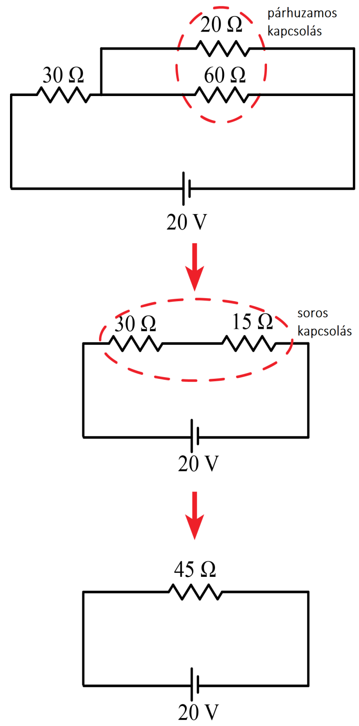
A három, sorosan kapcsolt 20 W-os ellenállás eredő ellenállása: $R_e = 20\Omega + 20\,\Omega + 20\,\Omega = 60\,\Omega$ (4p)

<table>
<tr>
<td>


</td>
<td>A két, sorosan kapcsolt 10W-os ellenállás eredő ellenállása: $R_e = 10\,\Omega + 10\,\Omega = 20\,\Omega$ (4p)</td>
</tr>
<tr>
<td>


</td>
<td>A két, párhuzamosan kapcsolt 20 W-os ellenállás eredő ellenállása: $\frac{1}{R_e} = \frac{1}{20\,\Omega} + \frac{1}{20\,\Omega} = \frac{1}{10\,\Omega}$
$R_e = 10\,\Omega$ (4p)</td>
</tr>
<tr>
<td>


</td>
<td>A két, sorosan kapcsolt 10W-os ellenállás eredő ellenállása: $R_e = 10\,\Omega + 10\,\Omega = 20\,\Omega$ (4p)</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>A párhuzamosan kapcsolt 20 W-os és 60W-os ellenállások eredő ellenállása:
$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{20\,\Omega} + \frac{1}{60\,\Omega} = \frac{4}{60\,\Omega} = \frac{1}{15\,\Omega}$
$R_e = 15\,\Omega$</td>
</tr>
</table>



A sorosan kapcsolt 30W-os és 15W-os ellenállások eredő ellenállása: $R_e = 30\,\Omega + 15\,\Omega = 45\,\Omega$

Tehát az eredő ellenállás 45W. (4p)

Budó Ágoston Fizikai Feladatmegoldó Verseny
2018/2019 tanév
2018.11.08. 14.00-17.00.
10. évfolyam feladatainak megoldásai

A javítási útmutatóban minden feladathoz adunk egy megoldást. Maximális pontszám (vagy megfelelő részpontszám) adható bármely más, helyes, követhetően lejegyzett megoldásért is.

1. Feladat:

1. Egy széles folyó közepén lehorgonyzott bolyától egyszerre indul el két olyan csónak, amelyek egyenlő hosszúságú kötelekkel vannak a bolyához kötve. A partról nézve egymásra merőlegesen halad a két csónak. Az egyik csónak a parttal párhuzamosan halad, a másik pedig a folyó partja felé tart. Amikor megfeszülnek a kötelek, mindkét csónak visszafordul. A csónakok sebessége álló vízben 1.2-szerese lenne a folyó sebességének. Adjuk meg a csónakok indulásától a bolyához való visszaérkezésig eltelt idők arányát!

Megoldás:

Jelölje L a visszafordulásig megtett utat. Az első csónak, ami a folyó áramlási irányával megegyező irányban indult t_{11} idő elteltével fordul vissza: $t_{11}=\frac{L}{v'+u}$. (3p)

ahol v' a csónak sebessége a vízhez képest, u pedig a víz sebessége.

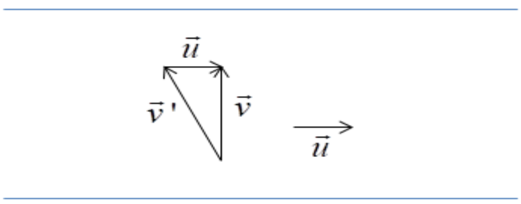
Amíg újból a bolyához ér, t_{12} idő telik el (ekkor már árral szemben halad): $t_{12}=\frac{L}{v'-u}$. (3p)

Az első csónak tehát t_1 idő alatt teszi meg az oda-vissza utat:

$$t_1=\frac{L}{v'+u}+\frac{L}{v'-u}=\frac{2\cdot L\cdot v'}{v'^2-u^2}=\frac{2\cdot L\cdot 1{,}2\cdot u}{1{,}44\cdot u^2-u^2}=\frac{2{,}4\cdot L}{0{,}44\cdot u} \quad . \qquad (3p)$$

A második csónak a folyó szemközti partja felé indul. Mivel a partra merőleges irányban mozog, a vízhez képest mért v' sebessége szöget zár be ezzel a merőleges irányú v sebességgel:

$$\vec{v}=\vec{v}\,'+\vec{u} \qquad (1p)$$



(1p)

Ekkor: $v=\sqrt{v'^2-u^2}$. (3p)

Ugyanez igaz lesz akkor is, amikor visszafelé halad a csónak. A második csónak tehát t_2 idő után ér vissza a bolyához:

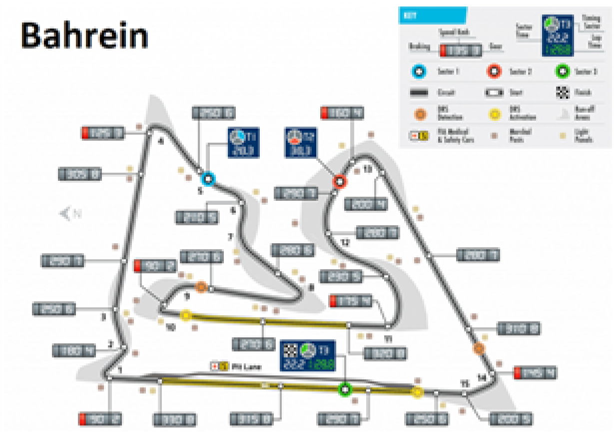
$$t_2=\frac{2\cdot L}{\sqrt{v'^2-u^2}}=\frac{2\cdot L}{u\cdot\sqrt{1{,}44-1}}=\frac{2\cdot L}{u\cdot\sqrt{0{,}44}} \qquad (3p)$$

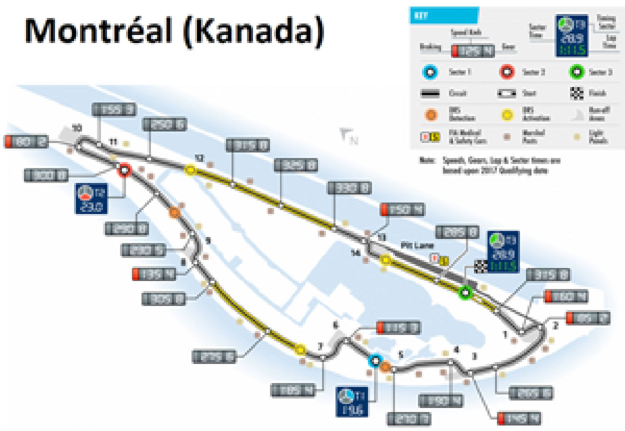
Ezekből tehát az indulástól a visszaérkezésig eltelt idők aránya:

$$\frac{t_2}{t_1}=\frac{\frac{2{,}4\cdot L}{0{,}44\cdot u}}{\frac{2\cdot L}{u\cdot\sqrt{0{,}44}}}=1{,}809 \qquad (3p)$$

2. Feladat:

A Forma 1-es autókat nemcsak elképesztő mértékű gyorsulásuk, hanem annál is drasztikusabb fékezhetőségük is jellemzi. Ezt támasztja alá a szezon első felének két legkeményebb fékezése is: a bahreini pálya 1-es kanyarja előtti féktávon az autók 330 km/h-ás sebességről mindössze 70 m megtétele alatt lassulnak le 80 km/h-ra, míg a montréali pálya 13-as kanyarja előtt ugyanakkora sebességről 50 méteren belül lassítanak le 150 km/h-ra. Melyik a keményebb féktáv?





Megoldás:

- A két féktáv közül az a „keményebb”, amelyiken – egyenes vonalú egyenletesen lassuló mozgást feltételezve – nagyobb nagyságú lassulást produkál az autó. Ehhez meg kell határoznunk, hogyan függ az *a* lassulás a feladatban megadott paraméterektől: a v_1 kezdősebességtől, a fékezés végén elért v_2 sebességtől, valamint a lassulás közben megtett *s* úttól. (1p)
- A sebesség lineáris csökkenéséből természetes úton adódik a fékezési idő meghatározásának lehetősége:

$v_2 = v_1 + a \cdot t$ így $t = \dfrac{v_2 - v_1}{a}$, ahol a<0 (mivel lassuló mozgásról van szó), és $v_2 < v_1$. (2p)

- Egyelőre a lassulást és a lassulással töltött időt sem ismerjük, így a megtett útra vonatkozó kinematikai alapösszefüggést alkalmazzuk: (1p)

$s(t) = s_0 + v_1 \cdot t + \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = v_1 \cdot t + \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$, hiszen s_0-t zérusnak vehettük (a féktáv elejétől indítjuk a mérést).

- Ebbe az összefüggésbe beírva a fékezési időre vonatkozó részeredményünket, a fékút nagysága csak a két sebességtől és a lassulástól fog függeni:

$$s(t) = v_1 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = v_1 \cdot \frac{v_2 - v_1}{a} + \frac{1}{2} \cdot a \cdot \left(\frac{v_2 - v_1}{a}\right)^2 = \frac{v_1 \cdot (v_2 - v_1)}{a} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(v_2 - v_1)^2}{a}$$

$$s(t) = \frac{1}{a} \cdot \left[v_1 \cdot (v_2 - v_1) + \frac{1}{2} \cdot (v_2 - v_1)^2\right] = \frac{1}{a} \cdot \left[v_1 \cdot v_2 - v_1^2 + \frac{v_2^2}{2} - v_2 \cdot v_1 + \frac{v_1^2}{2}\right]$$

$$s(t) = \frac{1}{a} \cdot \left(-v_1^2 + \frac{v_2^2}{2} + \frac{v_1^2}{2}\right) = \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2}\right)$$

$s(t) = \dfrac{v_2^2 - v_1^2}{2 \cdot a}$ Ez utóbbi éppen olyan paraméteres összefüggés, amilyet keresünk, hiszen átrendezés után:

$a = \dfrac{v_2^2 - v_1^2}{2 \cdot s}$ Ebbe behelyettesítve a feladatban megadott két paraméter-hármast, azonnal a féktávokon elért lassuláshoz jutunk. (Előjele a lassulásnak megfelelően negatív lesz, mivel $v_2 < v_1$.) (10p)

A feladatban megadott adatok (B = Bahrein, M = Montréal indexeléssel):

$v_{B1} = v_{M1} = 330 \dfrac{km}{h} = \dfrac{330}{3{,}6} \dfrac{m}{s} = 91{,}67 \dfrac{m}{s}$	
$v_{B2} = 80 \dfrac{km}{h} = 22{,}22 \dfrac{m}{s}$	$v_{B2} = 150 \dfrac{km}{h} = 41{,}67 \dfrac{m}{s}$
$s_B = 70 m$	$s_M = 50 m$

A bahreini lassulás nagysága: (2p)

$$a_B = \frac{v_{B2}^2 - v_{B1}^2}{2 \cdot s_B} = \frac{\left(22{,}22 \frac{m}{s}\right)^2 - \left(91{,}67 \frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 70\, m} = \frac{493{,}73 \frac{m^2}{s^2} - 8403{,}39 \frac{m^2}{s^2}}{140\, m} = \frac{-7909{,}66 \frac{m^2}{s^2}}{140\, m} = -56{,}50 \frac{m}{s^2}$$

A monteráli lassulás nagysága: (2p)

$$a_M=\frac{v_{M2}^2-v_{M1}^2}{2\cdot s_M}=\frac{\left(41{,}67\frac{m}{s}\right)^2-\left(91{,}67\frac{m}{s}\right)^2}{2\cdot 50\,m}=\frac{1736{,}39\frac{m^2}{s^2}-8403{,}39\frac{m^2}{s^2}}{100\,m}=\frac{-6667\frac{m^2}{s^2}}{100\,m}=-66{,}67\frac{m}{s^2}$$

A számítások szerint tehát a montréali 13-as kanyar előtti féktáv a keményebb. (2p)

3. Feladat:

2610-et írunk, és a Galaktikus Flotta szeretne űrhajót indítani a legközelebbi lakható bolygók meghódítására, de az előkészületek miatt nincs elég fizikában jártas kadét, aki kiszámolja a legmegfelelőbb indítási pontot a lehetséges helyszínek közül (ahol már minden készen áll a kilövésre). Ezért a Föld legtehetségesebb középiskolásainak segítségét kérik ennek a problémának a megoldásához. Ehhez egy faladatmegoldó-verseny kiírása mellett döntenek, ahol az alábbi példák megoldásával a jelentkezők bebizonyíthatják jártasságukat, és abban a megtiszteltetésben lehet részük, hogy segíthetnek az új világok meghódításában.

a) A jelentkezők aritmetikai ismereteinek tesztelése érdekében az első megoldandó probléma a Föld tömegének kiszámítása egy Földközeli pályán mozgó műhold adatai segítségével. A számoláshoz használja ki, hogy az űreszköz a Föld felszínétől átlagosan 400 km távolságban kering közelítőleg kör alakú pályán, 90 perces keringési idővel. (6 p)

b) A matematikai ismeretek felmérése mellett a kritikus gondolkodás is elengedhetetlen egy ilyen fontos döntés meghozatalához, így a következő teszt ezt hivatott lemérni. Tegyük fel, hogy elindítunk egy űrhajót a Holdon lévő bázisunk felé, de még mielőtt az űreszköz megérkezne, meghibásodik a rakétája. A legénység megmentése érdekében határozza meg, hogy melyik az a két lehetséges távolság, ahonnan a Hold gravitációja már felülmúlja a Föld vonzó erejét, ha a Hold tömege közelítőleg 1%-a a Földének. Magyarázza meg, hogy mi ennek a két megoldásnak a fizikai jelentősége! (6 p)

c) Végezetül pedig a legfontosabb feladat, hogy válasszuk ki a legmegfelelőbb (legkevesebb energiabefektetést igénylő) fellövési helyszínt a küldetés végrehajtásához, a következő lehetőségek közül: Föld – Cape Canaveral, Hold – Bolyai kráter, Jupiter Ganymedes nevű holdja. Válaszát minden esetben indokolja! (8 p)

A feladatok megoldásához használható adatok:

Föld sugara: 6371 km	Föld - Nap átlagos távolsága: 150 millió km
Hold sugara: 1738 km	Föld - Hold átlagos távolsága: 384 000 km
Jupiter-Nap átlagos távolsága: 779 millió km	Jupiter - Ganymedes átlagos távolsága: 1,8 millió km
Ganymedes sugara: 2631 km	Nap tömege: $1{,}989\cdot 10^{30}kg$

Megoldás:

a) A műhold távolsága: d = 6371 + 400 = 6771 km (1p)

t = 90 min = 5400 s

A kerületi sebesség: $v_k=\frac{2\cdot r\cdot \pi}{T}$ (1p)

$v=7{,}87\frac{km}{s}$ (1p)

Mivel a centripetális erő megegyezik a gravitációs erővel:

$\frac{m\cdot v^2}{r}=\gamma\cdot\frac{m\cdot M_F}{r^2}$ (1p)

$M_F=\frac{v^2\cdot r}{\gamma}=6{,}3\cdot 10^{24}kg$ (2p)

b) Határesetben az űrhajóra akkor kezd el jobban hatni a Hold, amikor a Föld és a Hold által kifejtett gravitációs erő egyenlő egymással:

$\gamma\cdot\frac{m\cdot M_F}{d^2}=\gamma\cdot\frac{m\cdot M_H}{(D_H-d)^2}$ (2p)

$\left(\frac{D_H-d}{d}\right)^2=\frac{M_H}{M_F}$

A két lehetséges megoldás: $d_1=0{,}9\cdot D_H=345600\text{km}$ (1p)

$d_2=1{,}1\cdot D_H=422400\text{km}$ (1p)

A Hold és Föld között elhelyezkedő távolság használható ki a Holdra szállásnál, hiszen ettől a ponttól kezdve a Hold már nagyobb gravitációs erőt fejt ki az űreszközre mint a Föld. Így megfelelő pályával minimális energiabefektetéssel meg tudjuk közelíteni a Holdat. A Hold túloldalán lévő pont ezzel szemben a Földtől való elszakadás tényleges határa, azaz ez az a távolság, ahol még a Hold gravitációját kihasználva visszatéríthető egy űrhajó a Földre.

(Bármely egyéb logikus magyarázat elfogadható! (2p)

c) A legkisebb energiabefektetéssel járó helyszín kiválasztásához a megadott égitestek távolságában kell kiszámolni a szökési sebességet.

$$\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2=\gamma\cdot\frac{m\cdot M}{r^2}$$ (3p)

R helyére az alábbi értéket kell behelyettesítve a szökési sebesség:

– Föld - Cape Canaveral: $R_{CC}=1{,}5\cdot 10^{11}\,m$

$v_{CC}=42{,}058\cdot\frac{km}{s}$ (1p)

– Hold - Bolyai kráter: $R_B=1{,}5\cdot 10^{11}\,m$, vagy

$R_B=1{,}5\cdot 10^{11}\,m+3{,}84\cdot 10^{7}\,m$ (Nap-Föld-Hold egy egyenesen van)

$v_B=42\cdot\frac{km}{s}$ (1p)

– Ganymedes: $R_G=7{,}79\cdot 10^{11}\,m$

$R_B=7{,}79\cdot 10^{11}\,m+1{,}8\cdot 10^{9}\,m$ (Nap-Jupiter-Ganymedes egy egyenesen van)

$v_B=18{,}434\cdot\frac{km}{s}$ (1p)

Mivel a Nap gravitációs terének elhagyásához sokkal nagyobb szökési sebességek és ezáltal nagyobb mozgási energiák kellenek, mint az adott égitest elhagyásához, ezért a legkisebb szökési sebességhez tartozó megoldás a legmegfelelőbb. (2p)

4. Feladat:

A szegedi ELI-ALPS lézeres kutatóközpontban nem csak ultrarövid, femtoszekundumos $(1\text{fs}=10^{-15}s)$ lézerimpulzusokat, de azok segítségével ennél még rövidebb, attoszekundumos $(1\text{as}=10^{-18}s)$ fényimpulzusokat (rövid fényfelvillanásokat) is előállítanak. A legrövidebb előállított fényfelvillanás világrekordja jelenleg 43 as, amellyel a vizsgált esetben kísérleteket végeznek. Az attoszekundumos impulzusok a legtöbb esetben úgynevezett impulzussorozat formájában állíthatok elő, ahol az egyes impulzusok pontosan a keltő, 800 nm hullámhosszúságú hullám félperiódusainkét követik egymást. Az impulzussorozattal párhuzamosan, azokkal egy irányban, elindítanak egy 5 atomból álló csoportot, amik szintén egymást egyenlő, 1202 nm távolságban követve a fénysebesség 10%-ával haladnak. Létezik-e olyan időpillanat, amikor mind az 5 atom egyszerre ki van világítva az attoszekundumos impulzusok által? Ha igen, mennyi ideig tart egy ilyen esemény és milyen sűrűn követik ezek egymást?

Megoldás:

A feladat szövege szerint az attoszekundumos impulzusok a keltő λ=800 nm hullámhosszúságú hullám félperiódusaiként követik egymást, ami pont a hullámhossz felét jelenti, tehát a követési távolságuk:

$$l_i=\frac{\lambda}{2}=\frac{800\,nm}{2}=400\,nm=4\cdot 10^{-7\text{m}}$$

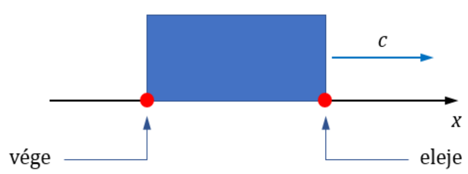
(2p)

Az impulzusok $(\Delta t=43\text{as}=43\cdot 10^{-18}\,s)$ térbeli hossza, az az egy impulzus által kivilágított longitudinális térrész:

$$d_{vil}=c\cdot\Delta t=3\cdot 10^{8}\cdot\frac{m}{s}\cdot 43\cdot 10^{-18}s=12{,}9\cdot 10^{-9}\,m=12{,}9\,nm\quad.$$ (2p)

Tehát periodikusan ismétlődik egy 12,9 nm-es kivilágított, majd egy $d_{söt}$=400 nm-12,9 nm=387,1 nm-es kivilágítatlan rész. (2p)

Az első kérdés megválaszolásához tegyük fel, hogy az első atomunk éppen egy kivilágított rész végén van (ezzel nem korlátozzuk az eredmény általánosságát). Viszonyítsuk a terjedési irányhoz a megvilágított tartomány elejét, illetve a végét:



Ekkor a második atom, tőle l_a=1202 nm távolságban, is kivilágított részben van akkor, ha

$$\left\{\frac{l_a}{l_i}\right\}<\frac{d_{vil}}{l_i} \qquad \text{(2p)}$$

Ahol {a} az a törtrészét jelöli. Ez igaz, hiszen

$$\left\{\frac{l_a}{l_i}\right\}=0{,}005 \quad , \quad \frac{d_{vil}}{l_i}=0{,}03225 \quad . \qquad \text{(2p)}$$

Az összes többi atom is ki van világítva, ha

$$4\cdot\left\{\frac{l_a}{l_i}\right\}<\frac{d_{vil}}{l_i} \qquad \text{(2p)}$$

Ez szintén teljesül: $4\cdot\left\{\frac{l_a}{l_i}\right\}=0{,}02$.

Tehát van olyan időpont, amikor minden atom ki van világítva. (2p)

A második kérdés megválaszolásához, azaz, hogy mennyi ideig van minden atom egyszerre kivilágítva, továbbra is érdemes az előző példánál maradni. Mivel az impulzusok gyorsabban haladnak, így az a kérdés, hogy az utolsó, ötödik atom mikor kerül be a megvilágított részbe, mert ebben az időpontban a fényimpulzusok 12,9 nm hosszúsága miatt még az első és a többi atom is meg lesz világítva. Tehát azt kell kiszámolni az előző szituációban:

$$t_{mind,kiv}=\frac{d_{vil}-4\cdot\left\{\frac{l_a}{l_i}\right\}\cdot l_i}{c-0{,}1\cdot c}=\frac{12{,}9\,nm-0{,}02\cdot 400\mathrm{nm}}{0{,}9\cdot 3\cdot 10^{17}\frac{nm}{s}}=\frac{4{,}9\,nm}{2{,}7\cdot 10^{17}\cdot\frac{nm}{s}}=1{,}81\cdot 10^{-17\mathrm{s}}=18{,}1\,as \qquad \text{(2p)}$$

Az utolsó kérdés megválaszolásához még azt kell kiszámolni, hogy mennyi időt tölt el egy atom kivilágítva, illetve sötétben

$$t_{vil}=\frac{d_{vil}}{c-0{,}1\cdot c}=\frac{12{,}9\,nm}{0{,}9\cdot 3\cdot 10^{17}\frac{nm}{s}}=\frac{12{,}9\,nm}{2{,}7\cdot 10^{17}\frac{nm}{s}}=1433{,}7\cdot 10^{-18}s=1433{,}7\,as \qquad \text{(2p)}$$

Mivel az egy atom kivilágított időszaka sokkal rövidebb, mint a sötét, így könnyen látható, hogy akkor lesz újra minden atom kivilágítva amikor az eddigi gondolatmenet első szituációja újra fennáll, tehát az első atomot utoléri egy impulzus eleje. Az ismétlődés tehát az előző két idő összege:

$$t_{ism}=\frac{l_{ism}}{c-0{,}1\cdot c}=t_{söt}+t_{vil}=47{,}8\,as+1433{,}7\,as=1481{,}5\,as \qquad \text{(2p)}$$

Budó Ágoston Fizikai Feladatmegoldó Verseny
2018/2019 tanév
2018.11.08. 14.00-17.00.
11. évfolyam feladatainak megoldásai

A javítási útmutatóban minden feladathoz adunk egy megoldást. Maximális pontszám (vagy megfelelő részpontszám) adható bármely más, helyes, követhetően lejegyzett megoldásért is.

1. Feladat:

2610-et írunk, és a Galaktikus Flotta szeretne űrhajót indítani a legközelebbi lakható bolygók meghódítására, de az előkészületek miatt nincs elég fizikában jártas kadét, aki kiszámolja a legmegfelelőbb indítási pontot a lehetséges helyszínek közül (ahol már minden készen áll a kilövésre). Ezért a Föld legtehetségesebb középiskolásainak segítségét kérik ennek a problémának a megoldásához. Ehhez egy faladatmegoldó-verseny kiírása mellett döntenek, ahol az alábbi példák megoldásával a jelentkezők bebizonyíthatják jártasságukat, és abban a megtiszteltetésben lehet részük, hogy segíthetnek az új világok meghódításában.

a) A jelentkezők aritmetikai ismereteinek tesztelése érdekében az első megoldandó probléma a Föld tömegének kiszámítása egy Földközeli pályán mozgó műhold adatai segítségével. A számoláshoz használja ki, hogy az űreszköz a Föld felszínétől átlagosan 400 km távolságban kering közelítőleg kör alakú pályán, 90 perces keringési idővel. (6 p)

b) A matematikai ismeretek felmérése mellett a kritikus gondolkodás is elengedhetetlen egy ilyen fontos döntés meghozatalához, így a következő teszt ezt hivatott lemérni. Tegyük fel, hogy elindítunk egy űrhajót a Holdon lévő bázisunk felé, de még mielőtt az űreszköz megérkezne, meghibásodik a rakétája. A legénység megmentése érdekében határozza meg, hogy melyik az a két lehetséges távolság, ahonnan a Hold gravitációja már felülmúlja a Föld vonzó erejét, ha a Hold tömege közelítőleg 1%-a a Földének. Magyarázza meg, hogy mi ennek a két megoldásnak a fizikai jelentősége! (6 p)

c) Végezetül pedig a legfontosabb feladat, hogy válasszuk ki a legmegfelelőbb (legkevesebb energiabefektetést igénylő) fellövési helyszínt a küldetés végrehajtásához, a következő lehetőségek közül: Föld – Cape Canaveral, Hold – Bolyai kráter, Jupiter Ganymedes nevű holdja. Válaszát minden esetben indokolja! (8 p)

A feladatok megoldásához használható adatok:

Föld sugara: 6371 km	Föld - Nap átlagos távolsága: 150 millió km
Hold sugara: 1738 km	Föld - Hold átlagos távolsága: 384 000 km
Jupiter-Nap átlagos távolsága: 779 millió km	Jupiter - Ganymedes átlagos távolsága: 1,8 millió km
Ganymedes sugara: 2631 km	Nap tömege: $1{,}989\cdot 10^{30} kg$

Megoldás:

a) A műhold távolsága: d = 6371 + 400 = 6771 km (1p)
t = 90 min = 5400 s

A kerületi sebesség: $v_k = \frac{2\cdot r\cdot \pi}{T}$ (1p)

$v = 7{,}87\frac{km}{s}$ (1p)

Mivel a centripetális erő megegyezik a gravitációs erővel:

$\frac{m\cdot v^2}{r} = \gamma\cdot\frac{m\cdot M_F}{r^2}$ (1p)

$M_F = \frac{v^2\cdot r}{\gamma} = 6{,}3\cdot 10^{24} kg$ (2p)

b) Határesetben az űrhajóra akkor kezd el jobban hatni a Hold, amikor a Föld és a Hold által kifejtett gravitációs erő egyenlő egymással:

$\gamma\cdot\frac{m\cdot M_F}{d^2} = \gamma\cdot\frac{m\cdot M_H}{(D_H - d)^2}$ (2p)

$\left(\frac{D_H - d}{d}\right)^2 = \frac{M_H}{M_F}$

A két lehetséges megoldás: $d_1 = 0{,}9\cdot D_H = 345600\text{km}$ (1p)

$$d_2 = 1{,}1 \cdot D_H = 422400\text{km}$$ (1p)

A Hold és Föld között elhelyezkedő távolság használható ki a Holdra szállásnál, hiszen ettől a ponttól kezdve a Hold már nagyobb gravitációs erőt fejt ki az űreszközre mint a Föld. Így megfelelő pályával minimális energiabefektetéssel meg tudjuk közelíteni a Holdat. A Hold túloldalán lévő pont ezzel szemben a Földtől való elszakadás tényleges határa, azaz ez az a távolság, ahol még a Hold gravitációját kihasználva visszatéríthető egy űrhajó a Földre. (Bármely egyéb logikus magyarázat elfogadható! (2p)

c) A legkisebb energiabefektetéssel járó helyszín kiválasztásához a megadott égitestek távolságában kell kiszámolni a szökési sebességet.

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \gamma \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$$ (3p)

R helyére az alábbi értéket kell behelyettesítve a szökési sebesség:

– Föld - Cape Canaveral: $R_{CC} = 1{,}5 \cdot 10^{11}\, m$

$$v_{CC} = 42{,}058 \cdot \frac{km}{s}$$ (1p)

– Hold - Bolyai kráter: $R_B = 1{,}5 \cdot 10^{11}\, m$, vagy

$R_B = 1{,}5 \cdot 10^{11}\, m + 3{,}84 \cdot 10^7\, m$ (Nap-Föld-Hold egy egyenesen van)

$$v_B = 42 \cdot \frac{km}{s}$$ (1p)

– Ganymedes: $R_G = 7{,}79 \cdot 10^{11}\, m$

$R_B = 7{,}79 \cdot 10^{11}\, m + 1{,}8 \cdot 10^9\, m$ (Nap-Jupiter-Ganymedes egy egyenesen van)

$$v_B = 18{,}434 \cdot \frac{km}{s}$$ (1p)

Mivel a Nap gravitációs terének elhagyásához sokkal nagyobb szökési sebességek és ezáltal nagyobb mozgási energiák kellenek, mint az adott égitest elhagyásához, ezért a legkisebb szökési sebességhez tartozó megoldás a legmegfelelőbb. (2p)

2. Feladat:

Búvárkodás során komoly biztonsági szabályok vonatkoznak a magas parciális nyomású oxigéngáz okozta mérgezés elkerülésére. Ha az O_2 gáz parciális nyomása eléri a tengerszinti parciális nyomásának hat és félszeresét, akkor a merülő búvár szervezetében görcsök és más egészségügyi problémák jelentkeznek, ami végzetes lehet. A levegő 21%-os oxigéntartalommal rendelkezik. Hány méter mélységig biztonságos sűrített levegős palackkal búvárkodni? Ebben a mélységben a búvár tüdeje hányad részére nyomódna össze kiegyenlítés nélkül?

(A tengervíz sűrűsége $1{,}03 \frac{g}{cm^3}$, a nehézségi gyorsulás $g = 9{,}81 \frac{m}{s^2}$, a tengerszinten mért légköri nyomás $p_0 \approx 10^5\, Pa$)

Megoldás:

A levegő összetétele: 78% N_2, 21% O_2, 1% egyéb (1p)

Normál légköri nyomás (tengerszinten lévő légköri nyomás): $p_0 \approx 10^5\, Pa \approx 1\, atm$ (1p)

Dalton törvénye: a gázelegy nyomása a parciális nyomások összege: $p = \sum_1^n p_i$ (2p)

Az oxigéngáz parciális nyomása (saját nyomása a levegőben): $p_{0,O_2} = 0{,}21 \cdot p_0 \approx 2{,}1 \cdot 10^4\, Pa \approx 0{,}21\, atm$ (2p)

Az O_2 gáz mérgező a szervezetre, ha saját nyomása eléri az 1,4 atm-t: $p_{tox} = 1{,}4\, atm \approx 1{,}4 \cdot 10^5\, Pa$. (1p)

$$\frac{p_{tox}}{0{,}21} = p'$$ (1p)

$$p' = \frac{1{,}4 \cdot 10^5\, Pa}{0{,}21} = \frac{14 \cdot 10^4\, Pa}{21 \cdot 10^{-2}} = \frac{2}{3} \cdot 10^6\, Pa$$ (2p)

$$p' = p_0 + \rho_t \cdot g \cdot h$$ (1p)

$$h = \frac{p' - p_0}{\rho_t \cdot g} = \frac{\left(\frac{20}{3} - \frac{3}{3}\right) \cdot 10^5 \frac{N}{m^2}}{1030 \frac{kg}{m^3} \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2}} = 5{,}608 \cdot 10^{-4} \cdot 10^5\, m$$ (3p)

$$h_{max} = 56{,}08\, m$$ (1p)

Tegyük fel, hogy az emberi test hőmérséklete állandó a merülés során. Tekintsük a tüdőt rugalmas, gázzal telt légüregnek.Ha nem lenne kiegyenlítődés:

$p_0 \cdot V_0 = p \cdot V$ (2p)

$$\frac{V}{V_0} = \frac{p_0}{p} = \frac{10^5 Pa}{\frac{2}{3} \cdot 10^6 Pa} = \frac{3}{20} = 0{,}15$$ (3p)

3. Feladat:

A szegedi ELI-ALPS lézeres kutatóközpontban nem csak ultrarövid, femtoszekundumos $(1\text{fs} = 10^{-15} s)$ lézerimpulzusokat, de azok segítségével ennél még rövidebb, attoszekundumos $(1\text{as} = 10^{-18} s)$ fényimpulzusokat (rövid fényfelvillanásokat) is előállítanak. A legrövidebb előállított fényfelvillanás világrekordja jelenleg 43 as, amellyel a vizsgált esetben kísérleteket végeznek. Az attoszekundumos impulzusok a legtöbb esetben úgynevezett impulzussorozat formájában állíthatok elő, ahol az egyes impulzusok pontosan a keltő, 800 nm hullámhosszúságú hullám félperiódusainkét követik egymást. Az impulzussorozattal párhuzamosan, azokkal egy irányban, elindítanak egy 5 atomból álló csoportot, amik szintén egymást egyenlő, 1202 nm távolságban követve a fénysebesség 10%-ával haladnak. Létezik-e olyan időpillanat, amikor mind az 5 atom egyszerre ki van világítva az attoszekundumos impulzusok által? Ha igen, mennyi ideig tart egy ilyen esemény és milyen sűrűn követik ezek egymást?

Megoldás:

A feladat szövege szerint az attoszekundumos impulzusok a keltő λ=800 nm hullámhosszúságú hullám félperiódusaiként követik egymást, ami pont a hullámhossz felét jelenti, tehát a követési távolságuk:

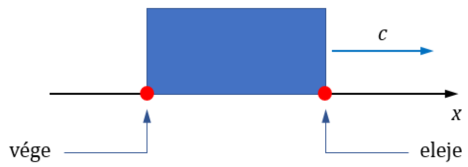
$$l_i = \frac{\lambda}{2} = \frac{800\, nm}{2} = 400\, nm = 4 \cdot 10^{-7}\text{m}$$ (2p)

Az impulzusok $(\Delta t = 43\text{as} = 43 \cdot 10^{-18} s)$ térbeli hossza, az az egy impulzus által kivilágított longitudinális térrész:

$$d_{vil} = c \cdot \Delta t = 3 \cdot 10^8 \cdot \frac{m}{s} \cdot 43 \cdot 10^{-18} s = 12{,}9 \cdot 10^{-9} m = 12{,}9\, nm \quad .$$ (2p)

Tehát periodikusan ismétlődik egy 12,9 nm-es kivilágított, majd egy $d_{söt}$=400 nm-12,9 nm=387,1 nm-es kivilágítatlan rész. (2p)

Az első kérdés megválaszolásához tegyük fel, hogy az első atomunk éppen egy kivilágított rész végén van (ezzel nem korlátozzuk az eredmény általánosságát). Viszonyítsuk a terjedési irányhoz a megvilágított tartomány elejét, illetve a végét:



Ekkor a második atom, tőle l_a=1202 nm távolságban, is kivilágított részben van akkor, ha

$$\left\{\frac{l_a}{l_i}\right\} < \frac{d_{vil}}{l_i}$$ (2p)

Ahol {a} az a törtrészét jelöli. Ez igaz, hiszen

$$\left\{\frac{l_a}{l_i}\right\} = 0{,}005 \quad , \quad \frac{d_{vil}}{l_i} = 0{,}03225 \quad .$$ (2p)

Az összes többi atom is ki van világítva, ha

$$4 \cdot \left\{\frac{l_a}{l_i}\right\} < \frac{d_{vil}}{l_i}$$ (2p)

Ez szintén teljesül: $4 \cdot \left\{\frac{l_a}{l_i}\right\} = 0{,}02 \quad .$

Tehát van olyan időpont, amikor minden atom ki van világítva. (2p)

A második kérdés megválaszolásához, azaz, hogy mennyi ideig van minden atom egyszerre kivilágítva, továbbra is érdemes az előző példánál maradni. Mivel az impulzusok gyorsabban haladnak, így az a kérdés, hogy az utolsó, ötödik atom mikor kerül be a megvilágított részbe, mert ebben az időpontban a fényimpulzusok 12,9 nm hosszúsága miatt még az első és a többi atom is meg lesz világítva. Tehát azt kell kiszámolni az előző szituációban:

$$t_{mind,kiv} = \frac{d_{vil} - 4 \cdot \left\{ \frac{l_a}{l_i} \right\} \cdot l_i}{c - 0{,}1 \cdot c} = \frac{12{,}9\,nm - 0{,}02 \cdot 400\text{nm}}{0{,}9 \cdot 3 \cdot 10^{17} \frac{nm}{s}} = \frac{4{,}9\,nm}{2{,}7 \cdot 10^{17} \cdot \frac{nm}{s}} = 1{,}81 \cdot 10^{-17s} = 18{,}1\,as \qquad (2p)$$

Az utolsó kérdés megválaszolásához még azt kell kiszámolni, hogy mennyi időt tölt el egy atom kivilágítva, illetve sötétben

$$t_{vil} = \frac{d_{vil}}{c - 0{,}1 \cdot c} = \frac{12{,}9\,nm}{0{,}9 \cdot 3 \cdot 10^{17} \frac{nm}{s}} = \frac{12{,}9\,nm}{2{,}7 \cdot 10^{17} \frac{nm}{s}} = 1433{,}7 \cdot 10^{-18}\,s = 1433{,}7\,as \qquad (2p)$$

Mivel az egy atom kivilágított időszaka sokkal rövidebb, mint a sötét, így könnyen látható, hogy akkor lesz újra minden atom kivilágítva amikor az eddigi gondolatmenet első szituációja újra fennáll, tehát az első atomot utoléri egy impulzus eleje. Az ismétlődés tehát az előző két idő összege:

$$t_{ism} = \frac{l_{ism}}{c - 0{,}1 \cdot c} = t_{söt} + t_{vil} = 47{,}8\,as + 1433{,}7\,as = 1481{,}5\,as \qquad (2p)$$

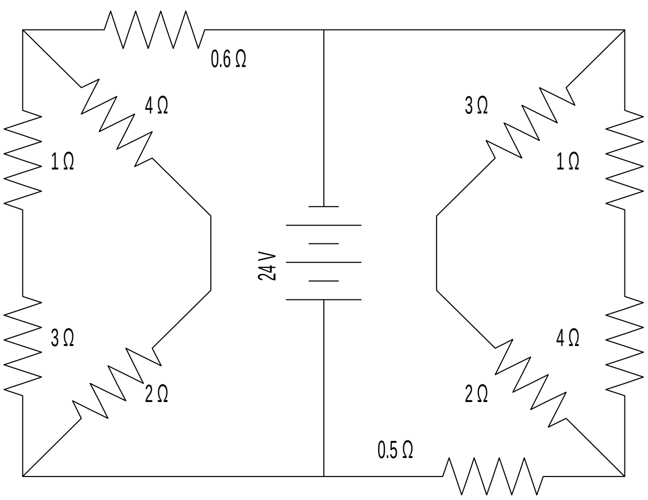
4. Feladat:

Az ábra egy kapcsolást mutat, amelyben egy telep és 10 ellenállás található. Határozza meg

a) az áramerősséget az egyes ágakban;

b) az egyes ellenállásokon eső feszültségeket;

c) az egyes ellenállások teljesítményeit!



Megoldás:

Kezdjük a megoldást az eredő ellenállások kiszámításával! Négy soros kapcsolású részlet van az áramkörben.	
Bal oldal	Jobb oldal
$R_e = 1\,\Omega + 3\,\Omega = 4\,\Omega$	$R_e = 2\,\Omega + 3\,\Omega = 5\,\Omega$
$R_e = 4\,\Omega + 2\,\Omega = 6\,\Omega$	$R_e = 1\,\Omega + 4\,\Omega = 5\,\Omega$
A párhuzamosan kapcsolt áramköri elemek eredő ellenállása:	
$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{4\,\Omega} + \frac{1}{6\,\Omega} = \frac{5}{12\,\Omega}$	$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{5\,\Omega} + \frac{1}{5\,\Omega} = \frac{2}{5\,\Omega}$
$R_e = \frac{12\,\Omega}{5} = 2{,}4\,\Omega$	$R_e = \frac{5\,\Omega}{2} = 2{,}5\,\Omega$
Ezek az ellenállások sorba vannak kötve egy-egy további ellenállással:	
$R_e = 2{,}4\,\Omega + 0{,}6\,\Omega = 3\,\Omega$	$R_e = 2{,}5\,\Omega + 0{,}5\,\Omega = 3\,\Omega$
Az áramkör bal- és jobboldali része párhuzamos kapcsolású:	

$$\frac{1}{R_e}=\frac{1}{3\,\Omega}+\frac{1}{3\,\Omega}=\frac{2}{3\,\Omega}$$

$$R_e=1{,}5\,\Omega$$

(5p)

Az eredő ellenállás ismeretében az áramerősség Ohm-törvény alapján meghatározható:

$$I=\frac{U}{R_e}=\frac{24\,V}{1{,}5\Omega}=16\,A$$

(3p)

Az áramkör egyes mellékágaiban folyó áramok erőssége lépésenként meghatározható, felhasználva, hogy párhuzamos kapcsolás esetén az áramerősség az ellenállásokkal fordított arányban oszlik.

8A folyik át a 0,6Ω ellenálláson a bal oldalon.	8A folyik át a 0,5Ω ellenálláson a jobb oldalon.
$\frac{3}{5}\cdot 8\,A=4{,}8\,A$ az 1 Ω-os és a 3 Ω-os ellenállásokon átfolyó áram erőssége a bal oldalon.	$\frac{1}{2}\cdot 8\,A=4{,}0\,A$ a 2 Ω-os és a 3 Ω-os ellenállásokon átfolyó áram erőssége a jobb oldalon.
$\frac{2}{5}\cdot 8\,A=3{,}2\,A$ a 2 Ω-os és a 4 Ω-os ellenállásokon átfolyó áram erőssége a bal oldalon.	$\frac{1}{2}\cdot 8\,A=4{,}0\,A$ az 1 Ω-os és a 4 Ω-os ellenállásokon átfolyó áram erőssége a jobb oldalon.

(4p)

b) Az $U=R\cdot I$ összefüggés ismételt alkalmazásával meghatározhatóak az egyes ellenállásokon eső feszültségek, amelyek értékei az alsó táblázatban találhatóak.

(4p)

c) A $P=U\cdot I=I^2\cdot R=\frac{U^2}{R}$ összefüggés bármelyik változatának ismételt alkalmazásával a teljesítmények meghatározhatóak – a számítás eredménye az alsó táblázatban látható.

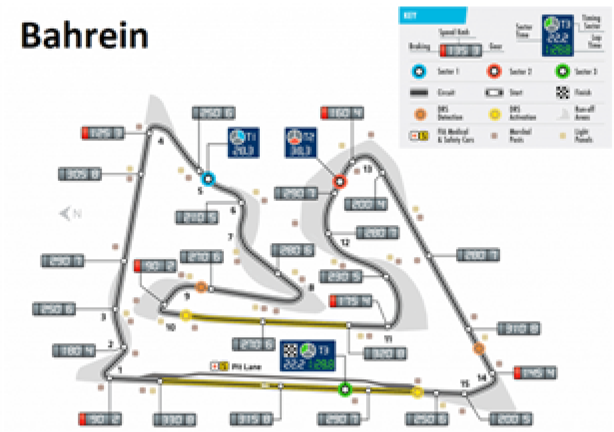
1. (4p)

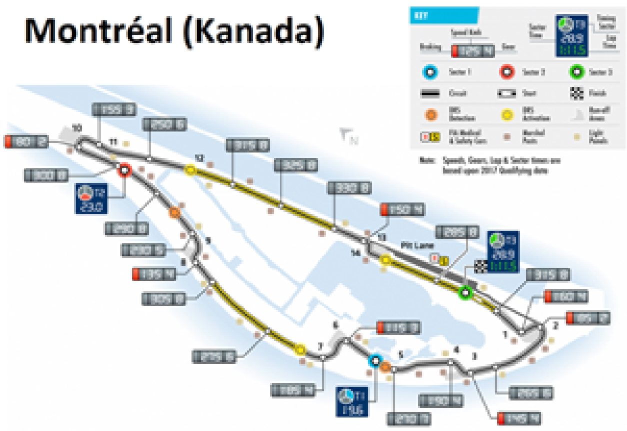
Bal oldal				Jobb oldal			
R [Ω]	I [A]	U [V]	P [W]	R [Ω]	I [A]	U [V]	P [W]
0,6	8,0	4,8	38,40	0,5	8	4	32
1,0	4,8	4,8	23,04	1,0	4	4	16
2,0	3,2	6,4	20,48	2,0	4	8	32
3,0	4,8	14,4	69,12	3,0	4	12	48
4,0	3,2	12,8	40,96	4,0	4	16	64

Budó Ágoston Fizikai Feladatmegoldó Verseny
2018/2019 tanév
2018.11.08. 14.00-17.00.
12. évfolyam feladatainak megoldása

A javítási útmutatóban minden feladathoz adunk egy megoldást. Maximális pontszám (vagy megfelelő részpontszám) adható bármely más, helyes, követhetően lejegyzett megoldásért is.

1. A Forma 1-es autókat nemcsak elképesztő mértékű gyorsulásuk, hanem annál is drasztikusabb fékezhetőségük is jellemzi. Ezt támasztja alá a szezon első felének két legkeményebb fékezése is: a bahreini pálya 1-es kanyarja előtti féktávon az autók 330 km/h-ás sebességről mindössze 70 m megtétele alatt lassulnak le 80 km/h-ra, míg a montréali pálya 13-as kanyarja előtt ugyanakkora sebességről 50 méteren belül lassítanak le 150 km/h-ra. Melyik a keményebb féktáv? (hol kell erősebben fékezni)





Megoldás:

○ A két féktáv közül az a „keményebb”, amelyiken – egyenes vonalú egyenletesen lassuló mozgást feltételezve – nagyobb nagyságú lassulást produkál az autó. Ehhez meg kell határoznunk, hogyan függ az *a* lassulás a feladatban megadott paraméterektől: a v_1 kezdősebességtől, a fékezés végén elért v_2 sebességtől, valamint a lassulás közben megtett *s* úttól. (1p)

○ A sebesség lineáris csökkenéséből természetes úton adódik a fékezési idő meghatározásának lehetősége:

$v_2 = v_1 + a\cdot t$ így $t = \frac{v_2 - v_1}{a}$, ahol a<0 (mivel lassuló mozgásról van szó), és $v_2 < v_1$. (2p)

○ Egyelőre a lassulást és a lassulással töltött időt sem ismerjük, így a megtett útra vonatkozó kinematikai alapösszefüggést alkalmazzuk: (1p)

$s(t) = s_0 + v_1\cdot t + \frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2 = v_1\cdot t + \frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2$, hiszen s_0-t zérusnak vehettük (a féktáv elejétől indítjuk a mérést).

○ Ebbe az összefüggésbe beírva a fékezési időre vonatkozó részeredményünket, a fékút nagysága csak a két sebességtől és a lassulástól fog függeni:

$$s(t) = v_1\cdot t + \frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2 = v_1\cdot\frac{v_2 - v_1}{a} + \frac{1}{2}\cdot a\cdot\left(\frac{v_2 - v_1}{a}\right)^2 = \frac{v_1\cdot(v_2 - v_1)}{a} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(v_2 - v_1)^2}{a}$$

$$s(t) = \frac{1}{a}\cdot\left[v_1\cdot(v_2 - v_1) + \frac{1}{2}\cdot(v_2 - v_1)^2\right] = \frac{1}{a}\cdot\left[v_1\cdot v_2 - v_1^2 + \frac{v_2^2}{2} - v_2\cdot v_1 + \frac{v_1^2}{2}\right]$$

$$s(t) = \frac{1}{a}\cdot\left(-v_1^2 + \frac{v_2^2}{2} + \frac{v_1^2}{2}\right) = \frac{1}{a}\cdot\left(\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2}\right)$$

$s(t) = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2\cdot a}$ Ez utóbbi éppen olyan paraméteres összefüggés, amilyet keresünk, hiszen átrendezés után:

$a=\frac{v_2^2-v_1^2}{2\cdot s}$ Ebbe behelyettesítve a feladatban megadott két paraméter-hármast, azonnal a féktávokon elért lassuláshoz jutunk. (Előjele a lassulásnak megfelelően negatív lesz, mivel $v_2 < v_1$.) (10p)

A feladatban megadott adatok (B = Bahrein, M = Montréal indexeléssel):

$v_{B1}=v_{M1}=330\frac{km}{h}=\frac{330}{3,6}\frac{m}{s}=91,67\frac{m}{s}$	
$v_{B2}=80\frac{km}{h}=22,22\frac{m}{s}$	$v_{B2}=150\frac{km}{h}=41,67\frac{m}{s}$
$s_B=70\text{m}$	$s_M=50\text{m}$

A bahreini lassulás nagysága: (2p)

$$a_B=\frac{v_{B2}^2-v_{B1}^2}{2\cdot s_B}=\frac{\left(22,22\frac{m}{s}\right)^2-\left(91,67\frac{m}{s}\right)^2}{2\cdot 70\,m}=\frac{493,73\frac{m^2}{s^2}-8403,39\frac{m^2}{s^2}}{140\,m}=\frac{-7909,66\frac{m^2}{s^2}}{140\,m}=-56,50\frac{m}{s^2}$$

A monteráli lassulás nagysága: (2p)

$$a_M=\frac{v_{M2}^2-v_{M1}^2}{2\cdot s_M}=\frac{\left(41,67\frac{m}{s}\right)^2-\left(91,67\frac{m}{s}\right)^2}{2\cdot 50\,m}=\frac{1736,39\frac{m^2}{s^2}-8403,39\frac{m^2}{s^2}}{100\,m}=\frac{-6667\frac{m^2}{s^2}}{100\,m}=-66,67\frac{m}{s^2}$$

A számítások szerint tehát a montréali 13-as kanyar előtti féktáv a keményebb. (2p)

2. <u>Feladat:</u>

Búvárkodás során komoly biztonsági szabályok vonatkoznak a magas parciális nyomású oxigéngáz okozta mérgezés elkerülésére. Ha az O_2 gáz parciális nyomása eléri a tengerszinti parciális nyomásának hat és félszeresét, akkor a merülő búvár szervezetében görcsök és más egészségügyi problémák jelentkeznek, ami végzetes lehet. A levegő 21%-os oxigéntartalommal rendelkezik. Hány méter mélységig biztonságos sűrített levegős palackkal búvárkodni? Ebben a mélységben a búvár tüdeje hányad részére nyomódna össze kiegyenlítés nélkül?

(A tengervíz sűrűsége $1,03\frac{g}{cm^3}$, a nehézségi gyorsulás $g=9,81\frac{m}{s^2}$, a tengerszinten mért légköri nyomás $p_0\approx 10^5\,Pa$)

<u>Megoldás:</u>

A levegő összetétele: 78% N_2, 21% O_2, 1% egyéb (1p)

Normál légköri nyomás (tengerszinten lévő légköri nyomás): $p_0\approx 10^5\,Pa\approx 1\,atm$ (1p)

Dalton törvénye: a gázelegy nyomása a parciális nyomások összege: $p=\sum_1^n p_i$ (2p)

Az oxigéngáz parciális nyomása (saját nyomása a levegőben): $p_{0,O_2}=0,21\cdot p_0\approx 2,1\cdot 10^4\,Pa\approx 0,21\,atm$ (2p)

Az O_2 gáz mérgező a szervezetre, ha saját nyomása eléri az 1,4 atm-t: $p_{tox}=1,4\,atm\approx 1,4\cdot 10^5\,Pa$. (1p)

$\frac{p_{tox}}{0,21}=p'$ (1p)

$p'=\frac{1,4\cdot 10^5\,Pa}{0,21}=\frac{14\cdot 10^4\,Pa}{21\cdot 10^{-2}}=\frac{2}{3}\cdot 10^6\,Pa$ (2p)

$p'=p_0+\rho_t\cdot g\cdot h$ (1p)

$h=\frac{p'-p_0}{\rho_t\cdot g}=\frac{\left(\frac{20}{3}-\frac{3}{3}\right)\cdot 10^5\frac{N}{m^2}}{1030\frac{kg}{m^3}\cdot 9,81\frac{m}{s^2}}=5,608\cdot 10^{-4}\cdot 10^5\,m$ (3p)

$h_{max}=56,08\,m$ (1p)

Tegyük fel, hogy az emberi test hőmérséklete állandó a merülés során. Tekintsük a tüdőt rugalmas, gázzal telt légüregnek.Ha nem lenne kiegyenlítődés:

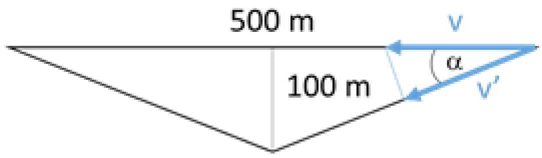
$p_0\cdot V_0=p\cdot V$ (2p)

$$\frac{V}{V_0}=\frac{p_0}{p}=\frac{10^5\,Pa}{\frac{2}{3}\cdot 10^6\,Pa}=\frac{3}{20}=0{,}15$$ (3p)

3. Feladat:

Egy versenypálya célegyenesének 500 m-es szakaszán a versenyautók konstans sebességgel haladnak. Egy szurkoló a célegyenes féltávjánál, a pályától 100 m-re figyeli a versenyautókat. Mekkora annak a versenyautónak a sebessége, amely motorhangját a célegyenes végén megfigyelve a szurkoló 102 Hz-cel hallja alacsonyabbnak a célegyenes elején tapasztalt frekvenciához képest? A versenyautó motorja az adott sebességnél 18000 fordulat/perc fordulatszámon működik.

Megoldás:



rajz (2p)

A feladat alapja a Doppler-jelenség. A célegyenes adott szakaszának két végpontjában az érzékelt frekvencia:

$$f_1=f_0\cdot\frac{c}{c-v'} \quad \text{és} \quad f_2=f_0\cdot\frac{c}{c+v'} \quad .$$ (4p)

Figyelembe kell venni, hogy a sebesség megfigyelő irányába eső komponensével kell számolni, amely a tényleges sebességből a következő megfontolások alapján adódik: (2p)

$$\alpha=arctg\frac{100}{\frac{500}{2}}=21{,}8° \quad \text{és} \quad v'=v\cdot\cos\alpha$$ (2p)

A frekvenciák különbsége:

$$\Delta f=f_1-f_2=f_0\cdot c\cdot\left(\frac{1}{c-v}-\frac{1}{c+v}\right)=f_0\cdot c\cdot\left(\frac{c+v}{(c-v)\cdot(c+v)}-\frac{c-v}{(c-v)\cdot(c+v)}\right)=f_0\cdot c\cdot\frac{2\cdot v}{c^2-v^2}=102\text{Hz}$$ (4p)

Ebből a következő másodfokú egyenletet tudjuk felírni v'-re:

$$v'^2+\frac{2\cdot f_0\cdot c}{\Delta f}\cdot v'-c^2=0$$ (2p)

A motor fordulatszáma: $f_0=18000\frac{1}{min}=300\,Hz$.

Ebből a valós megoldás: $v'=56{,}2\frac{m}{s}=202{,}3\frac{km}{h}$. (2p)

Ez tehát a sebességvektor megfigyelő irányába mutató komponensének nagysága. (1p)

Az autó tényleges sebessége: $v=\frac{v'}{\cos\alpha}=217{,}9\frac{km}{h}$ (1p)

4. Feladat:

A szegedi ELI-ALPS lézeres kutatóközpontban nem csak ultrarövid, femtoszekundumos $(1\text{fs}=10^{-15}s)$ lézerimpulzusokat, de azok segítségével ennél még rövidebb, attoszekundumos $(1\text{as}=10^{-18}s)$ fényimpulzusokat (rövid fényfelvillanásokat) is előállítanak. A legrövidebb előállított fényfelvillanás világrekordja jelenleg 43 as, amellyel a vizsgált esetben kísérleteket végeznek. Az attoszekundumos impulzusok a legtöbb esetben úgynevezett impulzussorozat formájában állíthatok elő, ahol az egyes impulzusok pontosan a keltő, 800 nm hullámhosszúságú hullám félperiódusainkét követik egymást. Az impulzussorozattal párhuzamosan, azokkal egy irányban, elindítanak egy 5 atomból álló csoportot, amik szintén egymást egyenlő, 1202 nm távolságban követve a fénysebesség 10%-ával haladnak. Létezik-e olyan időpillanat, amikor mind az 5 atom egyszerre ki van világítva az attoszekundumos impulzusok által? Ha igen, mennyi ideig tart egy ilyen esemény és milyen sűrűn követik ezek egymást?

Feladat:

A szegedi ELI-ALPS lézeres kutatóközpontban nem csak ultrarövid, femtoszekundumos $(1\text{fs}=10^{-15}s)$ lézerimpulzusokat, de azok segítségével ennél még rövidebb, attoszekundumos $(1\text{as}=10^{-18}s)$ fényimpulzusokat (rövid fényfelvillanásokat) is előállítanak. A legrövidebb előállított fényfelvillanás világrekordja jelenleg 43 as, amellyel a vizsgált esetben kísérleteket végeznek. Az attoszekundumos impulzusok a legtöbb esetben úgynevezett impulzussorozat formájában állíthatok elő, ahol az egyes impulzusok pontosan a keltő, 800 nm hullámhosszúságú

hullám félperiódusainkét követik egymást. Az impulzussorozattal párhuzamosan, azokkal egy irányban, elindítanak egy 5 atomból álló csoportot, amik szintén egymást egyenlő, 1202 nm távolságban követve a fénysebesség 10%-ával haladnak. Létezik-e olyan időpillanat, amikor mind az 5 atom egyszerre ki van világítva az attoszekundumos impulzusok által? Ha igen, mennyi ideig tart egy ilyen esemény és milyen sűrűn követik ezek egymást?

Megoldás:

A feladat szövege szerint az attoszekundumos impulzusok a keltő λ=800 nm hullámhosszúságú hullám félperiódusaiként követik egymást, ami pont a hullámhossz felét jelenti, tehát a követési távolságuk:

$$l_i = \frac{\lambda}{2} = \frac{800\,nm}{2} = 400\,nm = 4\cdot 10^{-7\mathrm{m}} \qquad (2p)$$

Az impulzusok $(\Delta t = 43\mathrm{as} = 43\cdot 10^{-18}\,s)$ térbeli hossza, az az egy impulzus által kivilágított longitudinális térrész:

$$d_{vil} = c\cdot\Delta t = 3\cdot 10^{8}\cdot\frac{m}{s}\cdot 43\cdot 10^{-18}\,s = 12{,}9\cdot 10^{-9}\,m = 12{,}9\,nm \quad . \qquad (2p)$$

Tehát periodikusan ismétlődik egy 12,9 nm-es kivilágított, majd egy $d_{söt}$=400 nm-12,9 nm=387,1 nm-es kivilágítatlan rész. (2p)

Az első kérdés megválaszolásához tegyük fel, hogy az első atomunk éppen egy kivilágított rész végén van (ezzel nem korlátozzuk az eredmény általánosságát). Viszonyítsuk a terjedési irányhoz a megvilágított tartomány elejét, illetve a végét:

Ekkor a második atom, tőle l_a=1202 nm távolságban, is kivilágított részben van akkor, ha

$$\left\{\frac{l_a}{l_i}\right\} < \frac{d_{vil}}{l_i} \qquad (2p)$$

Ahol {a} az a törtrészét jelöli. Ez igaz, hiszen

$$\left\{\frac{l_a}{l_i}\right\} = 0{,}005 \quad , \quad \frac{d_{vil}}{l_i} = 0{,}03225 \quad . \qquad (2p)$$

Az összes többi atom is ki van világítva, ha

$$4\cdot\left\{\frac{l_a}{l_i}\right\} < \frac{d_{vil}}{l_i} \qquad (2p)$$

Ez szintén teljesül: $4\cdot\left\{\frac{l_a}{l_i}\right\} = 0{,}02$.

Tehát van olyan időpont, amikor minden atom ki van világítva. (2p)

A második kérdés megválaszolásához, azaz, hogy mennyi ideig van minden atom egyszerre kivilágítva, továbbra is érdemes az előző példánál maradni. Mivel az impulzusok gyorsabban haladnak, így az a kérdés, hogy az utolsó, ötödik atom mikor kerül be a megvilágított részbe, mert ebben az időpontban a fényimpulzusok 12,9 nm hosszúsága miatt még az első és a többi atom is meg lesz világítva. Tehát azt kell kiszámolni az előző szituációban:

$$t_{mind,kiv} = \frac{d_{vil} - 4\cdot\left\{\frac{l_a}{l_i}\right\}\cdot l_i}{c-0{,}1\cdot c} = \frac{12{,}9\,nm - 0{,}02\cdot 400\mathrm{nm}}{0{,}9\cdot 3\cdot 10^{17}\,\frac{nm}{s}} = \frac{4{,}9\,nm}{2{,}7\cdot 10^{17}\cdot\frac{nm}{s}} = 1{,}81\cdot 10^{-17\mathrm{s}} = 18{,}1\,as \qquad (2p)$$

Az utolsó kérdés megválaszolásához még azt kell kiszámolni, hogy mennyi időt tölt el egy atom kivilágítva, illetve sötétben

$$t_{vil} = \frac{d_{vil}}{c-0{,}1\cdot c} = \frac{12{,}9\,nm}{0{,}9\cdot 3\cdot 10^{17}\,\frac{nm}{s}} = \frac{12{,}9\,nm}{2{,}7\cdot 10^{17}\,\frac{nm}{s}} = 1433{,}7\cdot 10^{-18}\,s = 1433{,}7\,as \qquad (2p)$$

Mivel az egy atom kivilágított időszaka sokkal rövidebb, mint a sötét, így könnyen látható, hogy akkor lesz újra minden atom kivilágítva amikor az eddigi gondolatmenet első szituációja újra fennáll, tehát az első atomot utoléri egy impulzus eleje. Az ismétlődés tehát az előző két idő összege:

$$t_{ism} = \frac{l_{ism}}{c-0{,}1\cdot c} = t_{söt} + t_{vil} = 47{,}8\,as + 1433{,}7\,as = 1481{,}5\,as \qquad (2p)$$