Budó Ágoston Fizikai Feladatmegoldó Verseny – 9. osztály Megoldások

A megoldások „tájékoztató jellegűek”, egy-egy lehetséges megoldási utat mutatnak be.
Minden más helyes megoldás is 20 pontot ér.
(A megoldások során a számolásokban csak ott írjuk ki a mértékegységet, ahol nem SI egységeket használunk.)

9/1. feladat: Filmekben gyakori, hogy amikor valamely szereplő elsüti a puskáját, akkor a visszalökő erőtől hátraesik. Tegyük fel, hogy a lövedék tömege 0,01 kg, sebessége amikor elhagyja a fegyvert 720 m/s. Legyen a lövöldöző hősnő tömege puskával együtt 51 kg, és tegyük fel, hogy a lövést álló helyzetben hajtja végre.
a) Mekkora a visszalökés sebessége?
b) Mekkora lesz a visszalökés sebessége, ha vaktölténnyel lő (ahogy vélhetően a filmforgatásnál történik), amelynek tömege $5 \cdot 10^{-4}$ kg és a sebessége 720 m/s?

9/1. Megoldás

Adatok & jelölések: $m_1 = 0{,}01\,\mathrm{kg}$; $v_1 = 720\,\mathrm{m/s}$; $M = 51\,\mathrm{kg}$; $m_2 = 5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg}$; $v_2 = 720\,\mathrm{m/s}$.

A lendület megmaradását kihasználva a kilőtt golyó lendülete megegyezik a visszalökődő hősnő lendületével: **(4 p)**

$$M \cdot V = m \cdot v \quad \Rightarrow \quad V = \frac{m \cdot v}{M}.$$

Ad a)

$$V_1 = \frac{m_1 \cdot v_1}{M} = \frac{0{,}01 \cdot 720}{51} = \underline{\underline{0{,}141\,\mathrm{m/s}}} \qquad \textbf{(8 p)}$$

Ad b)

$$V_2 = \frac{m_2 \cdot v_2}{M} = \frac{5 \cdot 10^{-4} \cdot 720}{51} = \underline{\underline{0{,}0071\,\mathrm{m/s}}} \qquad \textbf{(8 p)}$$

9/2. feladat: Egy ejtőernyős ugró először még csukott ernyővel 625 m-t esik 15 s alatt. Aztán kinyílik az ernyője és a következő 356 m-t 142 s alatt teszi meg.
a) Számolja ki az átlagsebességet amíg csukott ernyővel esik!
b) Számolja ki az átlagsebességet az ejtőernyős szakaszra!
c) Mekkora az átlagsebessége a teljes esésre?
d) Vázolja föl a sebesség-idő grafikont figyelembe véve a légellenállásokat! Az ernyő nélküli esésnél a sebesség kb. 5 s alatt állandósul, míg az ejtőernyős szakaszon ez már kb. 2 s alatt bekövetkezik.
e) Becsülje meg a maximális sebességet és a földetérés sebességét!

9/2. Megoldás

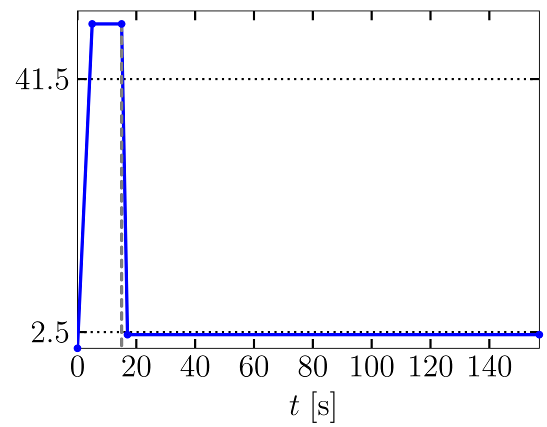
Adatok & jelölések: $s_1 = 625\,\mathrm{m}$; $\Delta t_1 = 15\,\mathrm{s}$; $s_2 = 356\,\mathrm{m}$; $\Delta t_2 = 142\,\mathrm{s}$; $\tau_1 = 5\,\mathrm{s}$; $\tau_2 = 2\,\mathrm{s}$.

Ad a) 1. szakasz: $\overline{v}_1 = \dfrac{s_1}{\Delta t_1} = \dfrac{625}{15} = \underline{\underline{41{,}67\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$ **(2 p)**

Ad b) 2. szakasz: $\overline{v}_2 = \dfrac{s_2}{\Delta t_2} = \dfrac{356}{142} = \underline{\underline{2{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$ **(2 p)**

Ad c) $\overline{v} = \dfrac{s_1 + s_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2} = \dfrac{625 + 356}{15 + 142} = \underline{\underline{6{,}25\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$ **(2 p)**

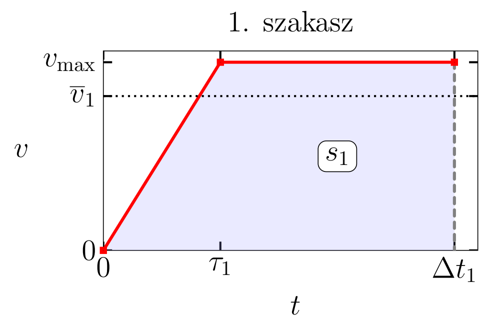
Ad d) A szöveg alapján a vázlatos grafikont az ábra mutatja. **(a grafikon: 6 p)**



Ad e) Az 1. szakaszon (ernyő nélküli esés) az állandósuló (maximális) sebességet $v_{\max}$-al jelölve, és az utat a vázlatos görbe alatti területtel számolva:

$$\frac{\tau_1 \cdot v_{\max}}{2} + (\Delta t_1 - \tau_1) \cdot v_{\max} = s_1$$

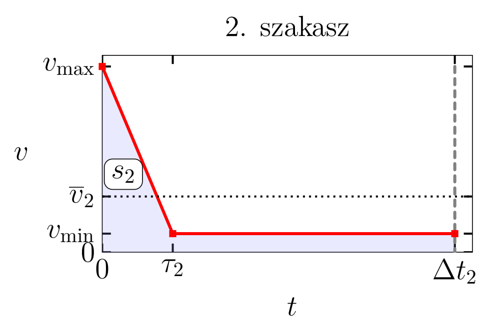
$$2{,}5 \cdot v_{\max} + 10 \cdot v_{\max} = 625 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{v_{\max} = 50\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}} \qquad \textbf{(4 p)}$$



A 2. szakaszon (ejtőernyővel esés) az állandósuló (minimális) sebességet $v_{\min}$-el jelölve és az utat a vázlatos görbe alatti területtel számolva:

$$\tau_2 \cdot \frac{v_{\max} + v_{\min}}{2} + (\Delta t_2 - \tau_2) \cdot v_{\min} = s_2$$

$$(50 + v_{\min}) + 140 \cdot v_{\min} = 356 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{v_{\min} = 2{,}17\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}} \qquad \textbf{(4 p)}$$



9/3. feladat: Két futó egymástól 100 m-re van és szembe futnak egy egyenes mentén. Mindegyik 10 m-t tesz meg az első másodpercben. Minden további másodpercben a futók az előző másodpercben megtett út 90%-át teszik meg. Így a sebességük minden másodpercben változik. Egyébként egy másodperc alatt a sebességet állandónak tekintjük. (a) Készítsünk hely-idő grafikont valamelyik futóra! A grafikon alapján határozzuk meg (b) a találkozásig eltelt időt és (c) a találkozás pillanatában a futók sebességét!

9/3. Megoldás

Adatok & jelölések: $L = 100\,\mathrm{m}$; $\Delta s_1 = 10\,\mathrm{m}$; $\Delta t = 1\,\mathrm{s}$; $q = 0{,}9$.

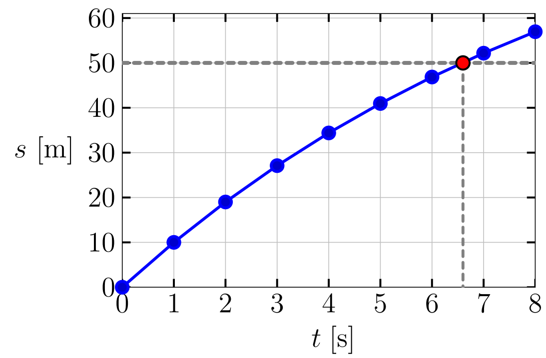
Az egyik futó által az egyes másodpercekben megtett út:

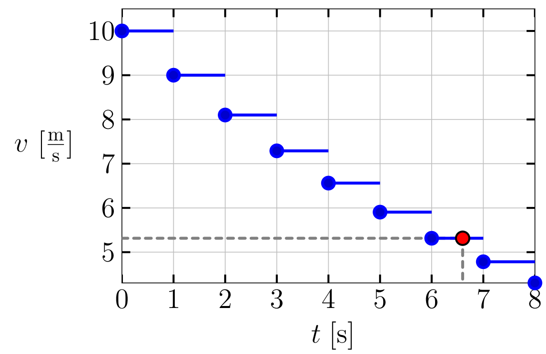
$$\Delta s_n = \Delta s_1 \cdot q^{n-1} = 10 \cdot 0{,}9^{n-1}\,\mathrm{m}\,.$$

Az összes addig megtett út az egyes útszakaszok összege:

$$s_n = \Delta s_1 + \Delta s_2 + \cdots + \Delta s_n.$$

Az átlagsebesség az egyes másodpercekben, (a kezdő pillanattal indexelve) : $v_n = \dfrac{s_{n+1}}{\Delta t} = \dfrac{\Delta s_1}{\Delta t} \cdot q^n = 10 \cdot 0{,}9^n\,\mathrm{m/s}$.





Ad (a) Készítsünk értéktáblázatot a fönti szabályokkal a függvény ábrázoláshoz:

t [s]	0	1	2	3	4	5	6	7
Δs_n [m]	0	10	9	8,1	7,29	6,56	5,90	5,31
s_n [m]	0	10	19	27,1	34,39	40,95	46,85	52,16
v_n [$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$]	10	9	8,1	7,29	6,56	5,90	5,31	4,78

(Érték táblázat + hely idő grafikon: 12 p)

Ad (b) Mivel a két futó egyformán mozog, $L/2 = 50\,\mathrm{m}$ megtétele után találkoznak. Ez 6 és 7 s között következik be, a grafikon alapján kb. $T = 6{,}5\,\mathrm{s}$-nál. **(4 p)**

Ad (c) Ekkor a sebesség a táblázat és a grafikon alapján $v(T) = v_6 = 5{,}31\,\mathrm{m/s}$. **(4 p)**

Megjegyzések: A találkozás időpontja „ránézés” helyett pontosan is kiszámítható a szabályok alapján. A másodpercenként szakaszolt leírás azonban nyilvánvalóan közelítő képet ad csak a mozgásról, így bőven elegendő a „ránézés” és fölösleges ilyen pontossággal eljárni.

$$46{,}85 + 5{,}31 \cdot \Delta\tilde{t} = 50 \quad\Rightarrow\quad \Delta\tilde{t} = \frac{50 - 46{,}85}{5{,}31} = 0{,}59\,\mathrm{s} \quad\Rightarrow\quad \tilde{T} = 6 + 0{,}59 = 6{,}59\,\mathrm{s}$$

A találkozás időpontjának meghatározásához használhatjuk a mértani sorozat összegképletét is:

$$s_n = \Delta s_1 \cdot \left(1 + q + \cdots + q^{n-1}\right) = \Delta s_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = 10 \cdot \frac{1 - 0{,}9^n}{1 - 0{,}9} = 100 \cdot (1 - 0{,}9^n) \geq 50$$

A legkisebb n amire $0{,}9^n \leq 0{,}5$ az $n = 7$. Tehát 6 és 7 s között következik be a találkozás.

9/4. feladat: 10 kg tömegű kocsira 1 kg-os téglát helyezünk. A kocsi és a tégla közötti tapadási és csúszási súrlódási együttható egyaránt 0,2, míg a kocsi és a talaj közti ellenállás elhanyagolható. A kocsit 10 N erővel vontatni kezdjük.
a) Mennyi munkát végez a súrlódási erő a téglán 20 s alatt?
b) Mekkora munkát végezne a súrlódási erő, ha a súrlódási együttható 0,2 helyett 0,09 lenne?
c) Legalább milyen hosszú teherautó esetén marad a tégla mindvégig a platón?
Számoljon $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$ nehézségi gyorsulással!

9/4. Megoldás

Adatok & jelölések: $M = 10\,\mathrm{kg}$; $m = 1\,\mathrm{kg}$; $\mu_0 = \mu = 0{,}2$; $F = 10\,\mathrm{N}$; $t = 20\,\mathrm{s}$; $\mu_0' = \mu' = 0{,}09$; $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$.

Az F erő hatására a kocsi gyorsulni kezd. A fellépő súrlódási erő akadályozza a kocsi mozgását, miközben gyorsítja a téglát.

$$\begin{cases} F - F_s = M \cdot a_\mathrm{K} \\ F_s = m \cdot a_\mathrm{T} \end{cases} \qquad \textbf{(2 p)}$$

A súrlódási együttható függvényében két eset lehetséges:
1. eset: Ha $F_s \leq F_{s,0} = \mu_0\, m\, g$, akkor a tégla **nem csúszik meg**. A kocsi és a tégla együtt mozog ($a_\mathrm{K} = a_\mathrm{T} \equiv a$):

$$\begin{cases} F = (m + M) \cdot a \\ F_s = m \cdot a \end{cases} \qquad \text{és} \qquad F_s \leq \mu_0\, m\, g$$

2. eset: a tégla **megcsúszik**, ebben az esetben $F_s = \mu\, m\, g$ és $a_\mathrm{T} \neq a_\mathrm{K}$:

$$\begin{cases} F - \mu\, m\, g = M \cdot a_\mathrm{K} \\ \mu\, m\, g = m \cdot a_\mathrm{T} \end{cases} \qquad \text{és} \qquad a_T \leq a_\mathrm{K}$$

Ad a) $F_{s,0} = \mu_0\, m\, g = 0{,}2 \cdot 1 \cdot 9{,}81 = 1{,}962\,\mathrm{N}$. Tegyük fel, hogy a tégla nem csúszik meg.

$$F = (m + M) \cdot a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{F}{m + M} = \frac{10}{11}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}} = 0{,}909\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}\,.$$

Valóban nem csúszik meg, hisz $F_s = m \cdot a = 1 \cdot 0{,}909 = 0{,}909\,\mathrm{N}$ és $0{,}909\,\mathrm{N} < 1{,}962\,\mathrm{N}$. **(4 p)**

A gyorsulás ismeretében a megtett út: $s = \dfrac{a}{2}\,t^2 = \dfrac{0{,}909}{2} \cdot 20^2 = 181{,}8\,\mathrm{m}$.

Így a súrlódási erő téglán végzett munkája: $W = F_s \cdot s = 0{,}909 \cdot 181{,}8 = \underline{\underline{165{,}3\,\mathrm{N}}}$. **(2 p)**

Másképp: Mivel a téglát a súrlódási erő gyorsítja a munkatétel alapján a megszerzett kinetikus energia megegyezik a súrlódási erő munkájával:

$$W = E_\mathrm{kin} = \frac{1}{2}\,m\,v^2 = \frac{1}{2}\,m\,(a \cdot t)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (0{,}909 \cdot 20)^2 = \underline{\underline{165{,}3\,\mathrm{N}}}.$$

(Az a) rész összesen: 8 p)

Ad b) $F_{s,0} = \mu_0'\, m\, g = 0{,}09 \cdot 1 \cdot 9{,}81 = 0{,}88\,\mathrm{N}$.
Az a) pontban végrehajtott számolásnál kapott súrlódási erő értéket összevetve ezzel, látjuk, hogy a tégla szükségképpen megcsúszik. Hiszen $0{,}909\,\mathrm{N} > 0{,}88\,\mathrm{N}$, ami ellentmond a meg nem csúszás

feltételének. **(4 p)**
Ebben az esetben $a_\mathrm{T} = \mu' \cdot g = 0{,}09 \cdot 9{,}81 = 0{,}88\,\mathrm{m/s^2}$. **(2 p)**
Mivel nem tudunk semmit a kocsi hosszáról feltételezzük, hogy a tégla nem esik le róla 20 s alatt.

A gyorsulás ismeretében a tégla által megtett út: $s_\mathrm{T} = \dfrac{a_\mathrm{T}}{2}\,t^2 = \dfrac{0{,}88}{2} \cdot 20^2 = 176\,\mathrm{m}$.

Így a súrlódási erő téglán végzett munkája: $W = F_s \cdot s = 0{,}88 \cdot 176 = \underline{\underline{154{,}9\,\mathrm{N}}}$. **(2 p)**

Másképp: Mivel a téglát a súrlódási erő gyorsítja a munkatétel alapján a megszerzett kinetikus energia megegyezik a súrlódási erő munkájával:

$$W = E_\mathrm{kin} = \frac{1}{2}\,m\,v_\mathrm{T}^2 = \frac{1}{2}\,m\,(a_\mathrm{T} \cdot t)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (0{,}88 \cdot 20)^2 = \underline{\underline{154{,}9\,\mathrm{N}}}.$$

(A b) rész összesen: 8 p)

Ad c) A b) pontban elvégzett számolásnál hallgatólagosan azt is föltételeztük, hogy a tégla nem csúszik le a kocsi platójáról. Most megbecsüljük, hogy ez legalább mekkora plató esetén érvényes. Ehhez kell a kocsi gyorsulása és a kocsi által megtett út.

$$F - \mu\,m\,g = M \cdot a_\mathrm{K} \quad \Rightarrow \quad a_\mathrm{K} = \frac{F - \mu\,m\,g}{M} = \frac{10 - 0{,}88}{10} = 0{,}912\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}} \qquad \textbf{(2 p)}$$

$$s_\mathrm{K} = \frac{a_\mathrm{K}}{2}\,t^2 = \frac{0{,}912}{2} \cdot 20^2 = 182{,}4\,\mathrm{m}$$

A tégla az útkülönbségnek megfelelő hosszat csúszik hátra, így a kocsi hosszának nagyobbnak kell lennie mint az útkülönbség:

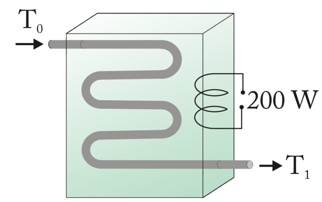
$$s_\mathrm{K} - s_\mathrm{T} = 182{,}4 - 176 = \underline{\underline{6{,}4\,\mathrm{m} \le L_\mathrm{kocsi}}} \qquad \textbf{(2 p)}$$

(A c) rész összesen: 4 p)

Budó Ágoston Fizikai Feladatmegoldó Verseny – $\boxed{\text{10. osztály}}$ Megoldások

A megoldások „tájékoztató jellegűek”, egy-egy lehetséges megoldási utat mutatnak be.
Minden más helyes megoldás is 20 pontot ér.
(A megoldások során a számolásokban csak ott írjuk ki a mértékegységet, ahol nem SI egységeket használunk.)

10/1. feladat: Az ábrán légbefúvásos elektromos fűtőberendezés látható. A hőszigetelt tartályban lévő vizet 200 W teljesítményű elektromos árammal melegítik. A víz hőt ad át a 10^5 Pa nyomású 7° C-os a fűtőberendezésbe beszívott, csőspirálban áthaladó levegőnek. A folyamatos működés során mind a víz, mind a terembe befújt levegő hőmérséklete 27° C-os. Mekkora a másodpercenként beszívott, illetve a terembe befújt levegő térfogata? A levegő nyomása mindvégig 10^5 Pa.



10/1. Megoldás:

Adatok & jelölések: $P = 200\,\text{W}$; $p_0 = 10^5\,\text{Pa}$; $T_{\text{be}} = 7°\,\text{C} = 280\,\text{K}$; $T_{\text{ki}} = 27°\,\text{C} = 300\,\text{K}$; $t = 1\,\text{s}$.
A folyamat stacionárius, a jellemző mennyiségek értéke állandósult. Így a másodpercenként beszívott illetve kifújt levegő térfogatára (V_{be},V_{ki}) és anyagmennyiségére ($n_{\text{be}} = n_{\text{ki}} = n$) teljesül az állapot egyenlet.
(1) $p_0 \cdot V_{\text{be}} = n \cdot R \cdot T_{\text{be}}$, illetve
(2) $p_0 \cdot V_{\text{ki}} = n \cdot R \cdot T_{\text{ki}}$. **(2 p)**
A fűtés során a víznek átadott energia teljes egészében a gázt melegíti (a víz hőmérséklete állandó), így a gáz által felvett hő másodpercenként: $Q = P \cdot t$. **(2 p)**
Az első főtétel alapján, a levegőt ideális gáznak tekintve, a felvett hő:
$Q = \Delta E_b - W = \frac{f}{2} n \cdot R \cdot (T_{\text{ki}} - T_{\text{be}}) + p_0(V_{\text{ki}} - V_{\text{be}})$.
Felhasználva továbbá (1)-et és (2)-t: $P \cdot t = \left(\frac{f}{2} + 1\right) n \cdot R \cdot (T_{\text{ki}} - T_{\text{be}})$ (Vagy érvelhetünk az állandó nyomáson érvényes molhővel).
Ebből az $n \cdot R$ szorzatot érdemes kifejezni:

$$n \cdot R = \frac{P \cdot t}{\left(\frac{f}{2} + 1\right)(T_{\text{ki}} - T_{\text{be}})} = \frac{200 \cdot 1}{\frac{7}{2} \cdot 20} = \frac{20}{7}\,\frac{\text{J}}{\text{K}},$$

amivel a másodpercenként beszívott és befújt térfogat kifejezhető:

$$V_{\text{be}} = n \cdot R \cdot \frac{T_{\text{be}}}{p_0} = \frac{20}{7} \cdot \frac{280}{10^5} = 8 \cdot 10^{-3}\,\text{m}^3 = \underline{\underline{8\,\ell}}; \qquad \textbf{(8 p)}$$

$$V_{\text{ki}} = n \cdot R \cdot \frac{T_{\text{ki}}}{p_0} = \frac{20}{7} \cdot \frac{300}{10^5} = 8{,}57 \cdot 10^{-3}\,\text{m}^3 = \underline{\underline{8{,}57\,\ell}}. \qquad \textbf{(8 p)}$$

10/2. feladat: Megújuló energiát előállító erőművek, pl. nap- vagy szélerőművek egyenetlen energiatermelését lehet gazdaságossá/biztonságossá tenni és a csúcsidőben felhasználni, ha az általuk termelt olcsó elektromos energiát valamilyen módon tárolni tudjuk. Újabban terjedőben van az energiatárolás sűrített levegős megoldása, amikor is levegőt pumpálnak egy nagy földalatti üregbe. A sűrített levegőben tárolt energia egy számottevő része pl. turbinával ismét elektromos energiává alakítható és csúcsidőben felhasználható. Hány háztartás napi szükséglete lenne kielégíthető a tárolt energiával, ha a földalatti üreg térfogata $5{,}6 \cdot 10^5\,\mathrm{m}^3$, a sűrített levegő nyomása $7{,}7 \cdot 10^6\,\mathrm{Pa}$, egy háztartás napi elektromos energia szükséglete $30\,\mathrm{kWh}$ és a sűrített levegőben tárolt energia 50%-a alakítható vissza?

10/2. Megoldás

Adatok & jelölések: $V = 5{,}6 \cdot 10^5\,\mathrm{m}^3$; $p = 7{,}7 \cdot 10^6\,\mathrm{Pa}$; $E_{\mathrm{nap}} = 30\,\mathrm{kWh}$; $f = 5$; $\eta = 0{,}5$.

$$1\,\mathrm{Wh} = 3600\,\mathrm{J}$$

A belső energia:

$$E_b = \frac{f}{2} n_1 \cdot R \cdot T \qquad \textbf{(5 p)}$$

Kihasználva a kezdeti és véghelyzetben érvényes állapotegyenleteket:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T. \qquad \textbf{(5 p)}$$

A belső energia kifejezését az alábbi módon átírhatjuk:

$$E_b = \frac{f}{2} p \cdot V$$

Behelyettesítve az adatokat:

$$E_b = \frac{5}{2} \cdot 7{,}7 \cdot 10^6 \cdot 5{,}6 \cdot 10^5 = 1{,}078 \cdot 10^{13}\,\mathrm{J} = 2{,}99444 \cdot 10^6\,\mathrm{kWh}\,. \qquad \textbf{(5 p)}$$

$$\frac{E_b \cdot \eta}{E_{\mathrm{nap}}} = \frac{2{,}99444 \cdot 10^6\,\mathrm{kWh} \cdot 0{,}5}{30\,\mathrm{kWh}} = 49\,907 \qquad \textbf{(5 p)}$$

Tehát $\underline{\underline{49\,907}}$ azaz kb. 50 000 háztartás napi energiaszükségletét tudja fedezni.

10/3. feladat: Két futó egymástól 100 m-re van és szembe futnak egy egyenes mentén. Mindegyik 10 m-t tesz meg az első másodpercben. Minden további másodpercben a futók az előző másodpercben megtett út 90%-át teszik meg. Így a sebességük minden másodpercben változik. Egyébként egy másodperc alatt a sebességet állandónak tekintjük. (a) Készítsünk hely-idő grafikont valamelyik futóra! A grafikon alapján határozzuk meg (b) a találkozásig eltelt időt és (c) a találkozás pillanatában a futók sebességét!

10/3. Megoldás

Adatok & jelölések: $L = 100\,\mathrm{m}$; $\Delta s_1 = 10\,\mathrm{m}$; $\Delta t = 1\,\mathrm{s}$; $q = 0{,}9$.

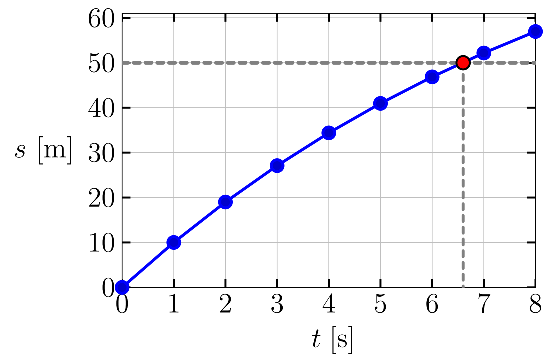
Az egyik futó által az egyes másodpercekben megtett út:

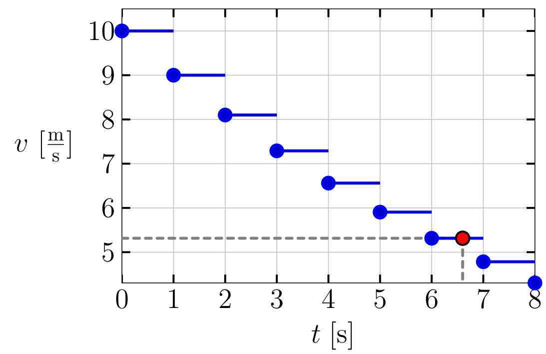
$$\Delta s_n = \Delta s_1 \cdot q^{n-1} = 10 \cdot 0{,}9^{n-1}\,\mathrm{m}\,.$$

Az összes addig megtett út az egyes útszakaszok összege:

$$s_n = \Delta s_1 + \Delta s_2 + \cdots + \Delta s_n.$$

Az átlagsebesség az egyes másodpercekben, (a kezdő pillanattal indexelve) : $v_n = \dfrac{s_{n+1}}{\Delta t} = \dfrac{\Delta s_1}{\Delta t} \cdot q^n = 10 \cdot 0{,}9^n\,\mathrm{m/s}$.





Ad (a) Készítsünk értéktáblázatot a fönti szabályokkal a függvény ábrázoláshoz:

t [s]	0	1	2	3	4	5	6	7
Δs_n [m]	0	10	9	8,1	7,29	6,56	5,90	5,31
s_n [m]	0	10	19	27,1	34,39	40,95	46,85	52,16
v_n [$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$]	10	9	8,1	7,29	6,56	5,90	5,31	4,78

(Érték táblázat + hely idő grafikon: 12 p)

Ad (b) Mivel a két futó egyformán mozog, $L/2 = 50\,\mathrm{m}$ megtétele után találkoznak. Ez 6 és 7 s között következik be, a grafikon alapján kb. $T = 6{,}5\,\mathrm{s}$-nál. **(4 p)**

Ad (c) Ekkor a sebesség a táblázat és a grafikon alapján $v(T) = v_6 = 5{,}31\,\mathrm{m/s}$. **(4 p)**

Megjegyzések: A találkozás időpontja „ránézés” helyett pontosan is kiszámítható a szabályok alapján. A másodpercenként szakaszolt leírás azonban nyilvánvalóan közelítő képet ad csak a mozgásról, így bőven elegendő a „ránézés” és fölösleges ilyen pontossággal eljárni.

$$46{,}85 + 5{,}31 \cdot \Delta\tilde{t} = 50 \quad \Rightarrow \quad \Delta\tilde{t} = \frac{50 - 46{,}85}{5{,}31} = 0{,}59\,\mathrm{s} \quad \Rightarrow \quad \tilde{T} = 6 + 0{,}59 = 6{,}59\,\mathrm{s}$$

A találkozás időpontjának meghatározásához használhatjuk a mértani sorozat összegképletét is:

$$s_n = \Delta s_1 \cdot \left(1 + q + \cdots + q^{n-1}\right) = \Delta s_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = 10 \cdot \frac{1 - 0{,}9^n}{1 - 0{,}9} = 100 \cdot (1 - 0{,}9^n) \geq 50$$

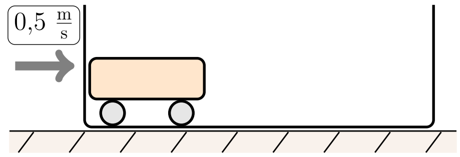
A legkisebb n amire $0{,}9^n \leq 0{,}5$ az $n = 7$. Tehát 6 és 7 s között következik be a találkozás.

10/4. feladat: Vízszintes talajon álló, 10 kg tömegű, 2 m hosszú láda egyik végébe 2 kg tömegű, 20 cm hosszú kiskocsit helyezünk, majd a ládát 0,5 m/s sebességgel meglökjük olyan irányban, hogy a láda fala a kiskocsit 0,5 m/s sebességgel magával ragadja. A talaj és a láda között a tapadási és a csúszási súrlódási együttható egyaránt 0,1, a kiskocsi gördülési ellenállását hanyagoljuk el.

a) A meglökés után mennyi idővel ütközik a kiskocsi a láda szemközti oldalának?

b) Mekkora lesz a kiskocsi és a láda sebessége az ütközést követően, ha az ütközés tökéletesen rugalmatlan?

c) Mikor áll le minden mozgás? Számoljon $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$-tel!



10/4. Megoldás

Adatok & jelölések: $M = 10\,\mathrm{kg}$; $L = 2\,\mathrm{m}$; $m = 2\,\mathrm{kg}$; $l = 20\,\mathrm{cm} = 0{,}2\,\mathrm{m}$; $v_0 = 0{,}5\,\mathrm{m/s}$; $\mu_0 = \mu = 0{,}1$.

Ad a) A kezdetben v_0 sebességgel meginduló dobozt $F_s = \mu\, N = \mu\,(m + M)\, g$ súrlódási erő fékezi, hiszen a dobozra $N = (M + m)\, g$ nyomó erő hat.

Így a doboz lassul: $F_s = M \cdot a_{\mathrm{D}} \quad \Rightarrow \quad a_{\mathrm{D}} = \dfrac{F_s}{M} = \dfrac{\mu\,(m + M)\, g}{M} = \dfrac{0{,}1 \cdot (10 + 2) \cdot 10}{10} = 1{,}2\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ **(3 p)**

A kocsi elejének koordinátája az időben: $x_{\mathrm{K}}(t) = l + v_0 \cdot t$

A doboz falának koordinátája az időben: $x_{\mathrm{D}}(t) = L + v_0 \cdot t - \dfrac{a_{\mathrm{D}}}{2} t^2$

Vigyázat! A doboz T_{D} idő múlva megáll: $v_{\mathrm{D}} = a_{\mathrm{D}} \cdot T_{\mathrm{D}} \quad \Rightarrow \quad T_{\mathrm{D}} = \dfrac{v_{\mathrm{D}}}{a_{\mathrm{D}}} = \dfrac{0{,}5}{1{,}2} = 0{,}4167\,\mathrm{s}$ **(4 p)**

1. szakasz: Kezdettől – a doboz megállásáig
$x_{\mathrm{K}}(T_{\mathrm{D}}) = l + v_0 \cdot T_{\mathrm{D}} = 0{,}2 + 0{,}5 \cdot 0{,}4167 = 0{,}408\,\mathrm{m}$
$x_{\mathrm{D}}(T_{\mathrm{D}}) = L + v_0 \cdot T_{\mathrm{D}} - \dfrac{a_{\mathrm{D}}}{2} T_{\mathrm{D}}^2 = 2 + 0{,}5 \cdot 0{,}4167 - \dfrac{1{,}2}{2} \cdot 0{,}4167^2 = 2{,}104\,\mathrm{m}$
Tehát valóban amikor a doboz megáll a kocsi még nem érte el a falát.

2. szakasz: A doboz megállásától – az ütközésig. A doboz fala ekkor $X_{\mathrm{D}} = 2{,}104\,\mathrm{m}$-en áll.

$$l + v_0 \cdot T_{\text{ütk}} = X_D \quad \Rightarrow \quad T_{\text{ütk}} = \frac{X_D - l}{v_0} = \frac{2{,}104 - 0{,}2}{0{,}5} = \underline{\underline{3{,}808\,\mathrm{s}}} \qquad \textbf{(5 p)}$$

(Az a) rész összesen: 12 p)

Ad b) Tökéletesen rugalmatlan az ütközés, tehát ütközés után a kocsi és a doboz együtt mozognak. A lendület megmaradása miatt:

$$m \cdot v_0 = (m + M) \cdot V \quad \Rightarrow \quad V = \frac{m \cdot v_0}{m + M} = \frac{2 \cdot 0{,}5}{12} = \underline{\underline{0{,}083\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}} \qquad \textbf{(4 p)}$$

Ad c) Az ütközés után kezdetben V sebességgel mozgó dobozt+kocsi együttest továbbra is az $F_s = \mu\, N = \mu\,(m + M)\, g$ súrlódási erő fékezi, így a lassulás:

$$F_s = (m + M) \cdot a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{F_s}{m + M} = \mu\, g = 0{,}1 \cdot 10 = 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2},$$

$$\text{és a megálláshoz szükséges idő:} \quad T_{\text{stop}} = \frac{V}{a} = \underline{\underline{0{,}083\,\mathrm{s}}}. \qquad \textbf{(4 p)}$$

Tehát az indulástól számítva $T_{\text{stop}} + T\text{ütk} = 0{,}083 + 3{,}808 = 3{,}892\,\mathrm{s}$ múlva áll el minden mozgás.

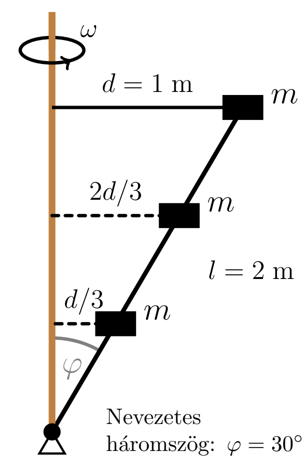
Budó Ágoston Fizikai Feladatmegoldó Verseny – 11. osztály Megoldások

A megoldások „tájékoztató jellegűek”, egy-egy lehetséges megoldási utat mutatnak be.
Minden más helyes megoldás is 20 pontot ér.
(A megoldások során a számolásokban csak ott írjuk ki a mértékegységet, ahol nem SI egységeket használunk.)

11/1. feladat: Súlytalannak tekinthető l hosszúságú merev rúdra erősítünk három tömeget: m_1-et a rúd egyik végétől $l/3$, m_2-t $2\,l/3$ és m_3-at l távolságra. A rúd tömeg nélküli végét csuklóval függőleges tengelyhez rögzítjük, a másik végét, amelyen az m_3 van, kikötjük a tengelyhez egy vízszintes, d hosszúságú kötéllel, majd a tengelyt a hozzá rögzített rúddal együtt ω szögsebességgel forgatni kezdjük.
a) Mennyi munkával jutunk a nyugvó állapotból a forgó állapotba?
b) Mekkora erő feszíti a kötelet a nyugvó állapotban és a forgó állapotban?
Adatok: $l = 2\,\mathrm{m}$; $d = 1\,\mathrm{m}$; $m_1 = m_2 = m_3 = 3\,\mathrm{kg}$; $\omega = 3\,\mathrm{s}^{-1}$.

11/1. Megoldás:

Ad a) A munkatétel alapján a szükséges munka megegyezik a mozgási energia változással. Az egyes tömegek kerületi sebessége rendre: $v_1 = \frac{d}{3}\,\omega$, $v_2 = \frac{2d}{3}\,\omega$ és $v_3 = d\,\omega$, így



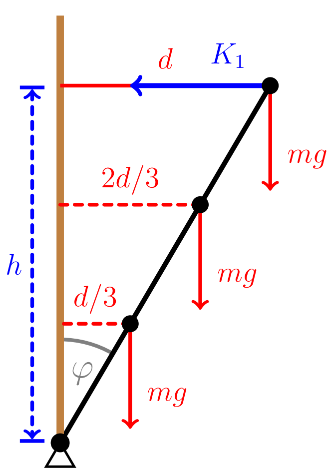
$$W = E_{\mathrm{kin}} = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{1}{2} m\, d^2\, \omega^2 \left(\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + 1\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{14}{9} m\, d^2\, \omega^2 = \underline{\underline{21\,\mathrm{J}}}.$$

Ugyan ez adódik a rendszer tehetetlenségi nyomatékával számolva:

$$\Theta = m\left(\frac{d}{3}\right)^2 + m\left(\frac{2d}{3}\right)^2 + m\,d^2 = m\,d^2\left(\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + 1\right) = \frac{14}{9}\,m\,d^2.$$

Ahonnan forgási energia:

$$E = \frac{1}{2}\,\Theta\,\omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{14}{9}\,m\,d^2\right)\omega^2 = \frac{7}{9} \cdot 3 \cdot 1^2 \cdot 3^2 = \underline{\underline{21\,\mathrm{J}}}. \qquad \textbf{(5 p)}$$



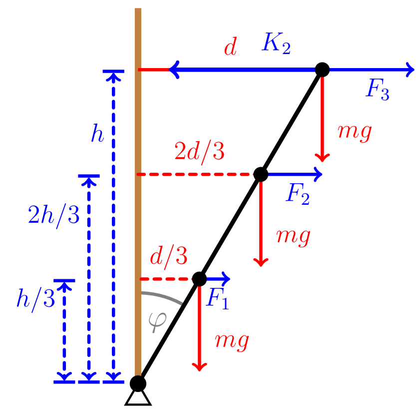
Ad b) Nyugvó állapot A kötélerőt a forgáspontra vett forgatónyomatékok egyensúlyából határozzuk meg. A kötélerő karja: $h = l\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}l = \sqrt{3}\,\mathrm{m}$. A tömegpontokra az erőkar rendre: $\frac{d}{3}$, $\frac{2d}{3}$ és d. Az egyes tömegpontokra ható nehézségi erők összes forgatónyomatéka:

$$M_{\mathrm{neh}} = mg \cdot \frac{d}{3} + mg \cdot \frac{2d}{3} + mg \cdot d = 2mg \cdot d,$$

amely megegyezik a kötélerő forgatónyomatékával, azaz **(5 p)**

$$2mg \cdot d = K_1 \cdot h \quad \Rightarrow \quad K_1 = \frac{2\,mgd}{h} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 1}{\sqrt{3}} = \underline{\underline{34{,}6\,\mathrm{N}}}.$$

Ad b) Forgó állapot A rúdhoz rögzített forgó koordináta-rendszerben a tömegpontokra ható tehetetlenségi erő forgatónyomatékával módosul az előző számítás. Az erők rendre: $F_1 = m\omega^2 \frac{d}{3}$, $F_2 = m\omega^2 \frac{2d}{3}$ és $F_3 = m\omega^2 d$. Míg az erőkarok: $\frac{h}{3}$, $\frac{2h}{3}$ és h. Így a tehetetlenségi erők forgatónyomatéka:



$$M_{\text{teh}} = m\omega^2 \frac{d}{3} \cdot \frac{h}{3} + m\omega^2 \frac{2d}{3} \cdot \frac{2h}{3} + m\omega^2 d \cdot h = \frac{14}{9} m\omega^2 d \cdot h$$

A forgatónyomatékok egyenlőségéből:

$$M_{\text{neh}} + M_{\text{teh}} = K_2 \cdot h, \text{ azaz } \qquad K_1 \cdot h + \frac{14}{9} m\omega^2 d \cdot h = K_2 \cdot h$$

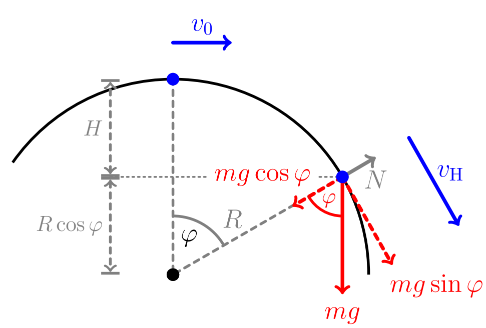
$$K_2 = K_1 + \frac{14}{9} m\omega^2 d = 34{,}6 + \frac{14}{9} \cdot 3 \cdot 3^2 \cdot 1 = \underline{\underline{76{,}6\,\text{N}}} \qquad \textbf{(10 p)}$$

11/2. feladat: h magasságú torony tetejét R sugarú félgömb alakú kupola fedi, amelynek „csúcsát" Merkúr szobor díszíti. Egy széllökés a szobor sarkáról leszakít egy kis darabot, amely a kupola tetejéről v_0 kezdősebességgel csúszni kezd a kupola mentén. A földet érés helye milyen távolságra van a kupola tetejétől? A kupola teteje a földtől $h + R$ magasságra van. A súrlódást, légellenállást hanyagoljuk el! Adatok: $g = 10\,\text{m/s}^2$; $h = 50\,\text{m}$; $R = 10\,\text{m}$; $v_0 = 5\,\text{m/s}$.

11/2. Megoldás:

A mozgás két szakaszra bontható. Kezdetben a tömegpont csúszik lefelé a kupolán, majd egy határsebességet elérve elemelkedik a kupola felszínétől és onnantól egy ferde hajítás történik. **(2 p)**

1. szakasz – csúszás a kupolán: A tömegpont mozgásegyenlete érintő irányú és sugárirányú komponensekre bontva, amíg el nem hagyja a kupola felszínét



$$\begin{cases} m\,g\sin\varphi = m\,a_{\text{t}} & (1) \\ m\,g\cos\varphi - N = m\,a_{\text{cp}} & (2) \end{cases}$$

A második egyenletből látjuk, hogy akkor emelkedik el a felszíntől, amikor az N nyomóerő nullává válik. Ekkor kihasználva, hogy $a_{\text{cp}} = \frac{v_H^2}{R}$

$$m\,g\cos\varphi = m\,\frac{v_H^2}{R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_H^2 = gR\cos\varphi} \qquad \textbf{(2 p)}$$

A v_H határsebességet ki tudjuk fejezni az energiamegmaradás segítségével is:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgH = \frac{1}{2}mv_H^2 \qquad \textbf{(2 p)}$$

Kihasználva, hogy $H = R\,(1 - \cos\varphi)$, **(1 p)**
a fenti egyenletből adódik a keresett sebesség négyzete:

$$\boxed{v_0^2 + 2gR\,(1 - \cos\varphi) = v_H^2}$$

A két keretezett egyenlet alapján

$$v_0^2 + 2gR\,(1 - \cos\varphi) = gR\cos\varphi \quad \Leftrightarrow \quad v_0^2 + 2gR = 3gR\cos\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{v_0^2}{3gR} + \frac{2}{3} = \frac{5^2}{3\cdot 10\cdot 10} + \frac{2}{3} = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi = 41{,}4^\circ} \qquad \textbf{(2 p)}$$

$$v_H = \sqrt{gR\cos\varphi} = \sqrt{10\cdot 10\cdot \frac{3}{4}} = 5\sqrt{3}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 8{,}66\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad \textbf{(1 p)}$$

(Eddig összesen: 10 p)

2. szakasz – ferde hajítás: Az ábrán látható koordinátarendszert felvéve: $x_0 = R\sin\varphi$, ahol $\sin\varphi = \sin 41{,}1^\circ = \sqrt{7}/4$. A kezdősebesség x és y komponense: $v_{x0} = v_H\sin\varphi$ ill. $v_{y0} = v_H\cos\varphi$. Így a ferde hajítást leíró egyenletek:

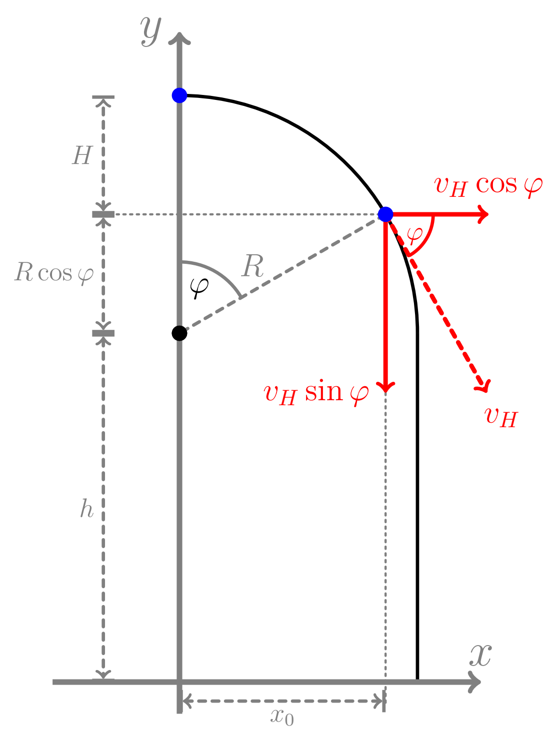
$$\begin{cases} x(t) = R\sin\varphi + v_H\cos\varphi\cdot t \\ y(t) = h + R\cos\varphi - v_H\sin\varphi\cdot t - \dfrac{g}{2}\cdot t^2 \end{cases}$$

Az utóbbi segítségével meghatározhatjuk az esés idejét:

$$0 = h + R\cos\varphi - v_H\sin\varphi\cdot T - \frac{g}{2}\cdot T^2$$

$$0 = 50 + 10\cdot\frac{3}{4} - 5\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}\cdot T - 5\cdot T^2$$

$$5\cdot T^2 + 5{,}728\cdot T - 57{,}5 = 0$$



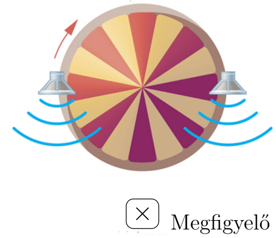
Ennek a másodfokú egyenletnek fizikailag értelmes (pozitív) megoldása: $T = 2{,}87\,\mathrm{s}$
Ahonnan a földetérés x koordinátája:

$$x(T) = R\sin\varphi + v_H\cos\varphi\cdot T = 10\cdot\frac{\sqrt{7}}{4} + 5\sqrt{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot 2{,}87 = \underline{\underline{25{,}26\,\mathrm{m}}}$$

(8 p)

A teljes magasság ismeretében ($h + R = 60\,\mathrm{m}$) a kupola tetejétől való távolság Pitagorasz tétellel adódik:

$$d = \sqrt{60^2 + 25{,}26^2} = \underline{\underline{65{,}1\,\mathrm{m}}} \qquad \textbf{(2 p)}$$



11/3. feladat: Egy 9 m sugarú körhinta két átellenes pontján a rajznak megfelelően hangszórókat rögzítettek. A körhinta egyenletes sebességgel forog miközben mindkét hangszóró 100 Hz frekvenciájú hangot bocsát ki. A hang terjedési sebessége levegőben 340 m/s. A körhinta 20 másodpercenként tesz egy fordulatot ezért 20 másodpercenként a hangerőben egy lüktetést hallunk. Létezik azonban egy további lüktetés a képen látható helyzet szerint. Mekkora ennek a frekvenciája?

11/3. Megoldás

Adatok & jelölések: $R = 9\,\mathrm{m}$; $T = 20\,\mathrm{s}$; $f_0 = 100\,\mathrm{Hz}$; $c = 340\,\mathrm{m/s}$.
A körhintán lévő 2 hangszóró az ábrázolt helyzetben a kerületi sebességgel közeledik illetve távolodik a megfigyelőhöz képest:

$$v = \omega \cdot R = \frac{2\pi}{T} \cdot R = \frac{2\pi}{20} \cdot 9 = 2{,}83\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad \mathbf{(2\ p)}$$

A Doppler-effektus miatt a megfigyelőhöz közelítő hangszóró frekvenciája kissé növekszik (hullámhossz csökken):

$$f_K = f_0 \cdot \frac{c}{c-v} = 100 \cdot \frac{340}{340 - 2{,}83} = 100{,}83\,\mathrm{Hz}, \qquad \mathbf{(4\ p)}$$

míg a távolodó hangszóró frekvenciája csökken (hullámhossza nő):

$$f_T = f_0 \cdot \frac{c}{c+v} = 100 \cdot \frac{340}{340 + 2{,}83} = 99{,}18\,\mathrm{Hz}, \qquad \mathbf{(4\ p)}$$

A két közel azonos frekvenciájú hanghullám interferenciája lebegést hoz létre, melynek frekvenciája:

$$f_l = f_K - f_T = 1{,}66\,\mathrm{Hz} = 1{,}66\,\frac{1}{\mathrm{s}}$$

Tehát <u>másodpercenként 1,66 lüktetést</u> hallunk. **(10 p)**

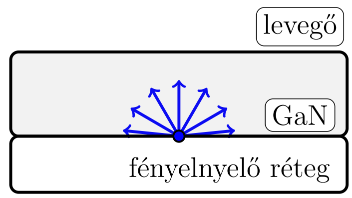
Megjegyzés: Addíciós tételek alapján a két közel azonos frekvenciájú rezgés összege:

$$A\sin(2\pi f_K \cdot t) + A\sin(2\pi f_T \cdot t) = 2A\sin\left(2\pi\,\frac{f_K + f_T}{2} \cdot t\right) \cdot \cos\left(2\pi\,\frac{f_K - f_T}{2} \cdot t\right)$$

Tehát a két frekvencia átlagával jellemzett szinuszos rezgés még egy koszinuszos burkolót is kap, ez okozza a kb 100 Hz-es hang elhalkulását majd felerősödését a koszinusz függvény minden egyes félperiódusában, így a lüktetés frekvenciája $f_K - f_T$.

11/4. feladat: A 2014-es fizikai Nobel-díjat a kék színű világító dióda (LED) megvalósításáért ítélték oda, amely a fehéren világító LED lámpa kék komponensét is szolgáltatja.
a) Egy fehér LED lámpa fogyasztása körülbelül egyhatoda az ugyanakkora fényerejű izzólámpáénak. Szénnel működő erőmű esetén 1 kWh elektromos energia termeléséhez mintegy 0,4 kg szenet kell elégetni. Ilyen erőművet föltételezve becsüljük meg, hogy mekkora tömegű széndioxid kibocsátást takarítunk meg egy év alatt azzal, ha naponta 3 órát egy 100 W-os izzólámpa helyett egy ugyanolyan fényerejű LED lámpát használunk.

A kék LED-ben a fény két különböző anyaggal adalékolt galliumnitrid (GaN) félvezető réteg közös felületén keletkezik, miközben a rétegben mozgó elektronok energiát veszítenek. A dióda 460 nm hullámhosszúságú fényt bocsát ki.
b) A LED fölépítését az ábrán látható módon lehet modellezni. A pontszerűnek tekinthető fényforrás egy félgömb felületének megfelelő minden irányban egyenlően bocsátja ki a kék fényt, amely – mielőtt kilépne a levegőre – egy szennyezetlen GaN síkrétegen halad át. A forrásból induló fényenergia hányad része lép ki ténylegesen a síkréteg felső felületén? Az anyagban való elnyelődésből adódó veszteségektől eltekintünk. A GaN törésmutatója levegőre vonatkozóan az adott hullámhosszon 2,5.



11/4. Megoldás

Adatok & jelölések: $c = 3 \cdot 10^8$ m/s; $M_\mathrm{C} = 12$ g/mol;
$M_{\mathrm{CO_2}} = (12 + 2 \cdot 16)$ g/mol $= 44$ g/mol

Ad a) A moláris tömegek arányát figyelembe véve 1 kg szénből $\frac{44}{12}$ kg széndioxid lesz.
Az izzó 1 év alatt napi 3 órás használattal az alábbi energiamennyiséget fogyasztja:

$$E = 100\,\mathrm{W} \cdot 365 \cdot 3\,\mathrm{h} = 109{,}5\,\mathrm{kWh}$$

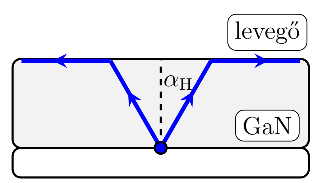
Ennek 5/6-od részét spóroljuk meg LED izzót használva.
Így a megspórolt szén tömege: $m_\mathrm{C} = \frac{5}{6} \cdot 109{,}5\,\mathrm{kWh} \cdot 0{,}4\,\mathrm{kg/kWh} = 36{,}5\,\mathrm{kg}$ **(6 p)**
Ahonnan a megspórolt széndioxid: $m_{\mathrm{CO_2}} = \frac{44}{12} \cdot 36{,}5\,\mathrm{kg} = \underline{\underline{133{,}83\,\mathrm{kg}}}$ **(6 p)**

(Az a) rész összesen: 12 p)

Ad b) A kilépő fény a GaN síkrétegen és a levegő határfelületén teljes visszaverődést szenvedhet.
A határszög:

$$\sin\alpha_\mathrm{H} = \frac{1}{2{,}5} \quad \Rightarrow \quad \alpha_\mathrm{H} = 23{,}6^\circ \qquad \textbf{(4 p)}$$

Ezt a határesetet az ábra mutatja. A GaN–levegő határfelületről ennél nagyobb beesési szög esetén visszaverődik a fénysugár. (Majd ilyen geometria esetén elnyelődik az alsó rétegben.) Csak a felületre $\alpha_\mathrm{H} = 23{,}6^\circ$ beesései szögnél kisebb szöggel érkező fénysugarak lépnek ki.



A pontszerű forrás a teljes $A_\mathrm{FG} = 2\pi r^2$ félgömbfelület mentén minden irányba egyenletesen sugároz. Ebből a sugárzásból azonban csak az $A = 2\pi r^2(1 - \cos\alpha_\mathrm{H})$ felületű gömbsüvegre eső rész jut át a határfelületen. Azaz a fényenergia a fenti felületek arányában lép ki:

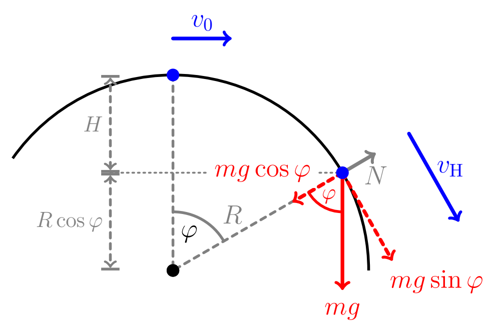
$$\eta = \frac{A}{A_\mathrm{FG}} = 1 - \cos\alpha_\mathrm{H} = 0{,}084 = \underline{\underline{8{,}4\%}} \qquad \textbf{(4 p)} \qquad \textbf{(A b) rész összesen: 8 p)}$$

Budó Ágoston Fizikai Feladatmegoldó Verseny – 12. osztály Megoldások

A megoldások „tájékoztató jellegűek”, egy-egy lehetséges megoldási utat mutatnak be.
Minden más helyes megoldás is 20 pontot ér.
(A megoldások során a számolásokban csak ott írjuk ki a mértékegységet, ahol nem SI egységeket használunk.)

12/1. feladat: h magasságú torony tetejét R sugarú félgömb alakú kupola fedi, amelynek „csúcsát” Merkúr szobor díszíti. Egy széllökés a szobor sarkáról leszakít egy kis darabot, amely a kupola tetejéről v_0 kezdősebességgel csúszni kezd a kupola mentén. A földet érés helye milyen távolságra van a kupola tetejétől? A kupola teteje a földtől $h+R$ magasságra van. A súrlódást, légellenállást hanyagoljuk el! Adatok: $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$; $h = 50\,\mathrm{m}$; $R = 10\,\mathrm{m}$; $v_0 = 5\,\mathrm{m/s}$.

12/1. Megoldás:



A mozgás két szakaszra bontható. Kezdetben a tömegpont csúszik lefelé a kupolán, majd egy határsebességet elérve elemelkedik a kupola felszínétől és onnantól egy ferde hajítás történik. **(2 p)**
1. szakasz – csúszás a kupolán: A tömegpont mozgásegyenlete érintő irányú és sugárirányú komponensekre bontva, amíg el nem hagyja a kupola felszínét

$$\begin{cases} m\,g\sin\varphi = m\,a_\mathrm{t} & (1) \\ m\,g\cos\varphi - N = m\,a_\mathrm{cp} & (2) \end{cases}$$

A második egyenletből látjuk, hogy akkor emelkedik el a felszíntől, amikor az N nyomóerő nullává válik. Ekkor kihasználva, hogy $a_\mathrm{cp} = \frac{v_H^2}{R}$

$$m\,g\cos\varphi = m\,\frac{v_H^2}{R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_H^2 = gR\cos\varphi} \qquad \textbf{(2 p)}$$

A v_H határsebességet ki tudjuk fejezni az energiamegmaradás segítségével is:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgH = \frac{1}{2}mv_H^2 \qquad \textbf{(2 p)}$$

Kihasználva, hogy $H = R\,(1-\cos\varphi)$, **(1 p)**
a fenti egyenletből adódik a keresett sebesség négyzete:

$$\boxed{v_0^2 + 2gR\,(1-\cos\varphi) = v_H^2}$$

A két keretezett egyenlet alapján

$$v_0^2 + 2gR\,(1-\cos\varphi) = gR\cos\varphi \quad \Leftrightarrow \quad v_0^2 + 2gR = 3gR\cos\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{v_0^2}{3gR} + \frac{2}{3} = \frac{5^2}{3\cdot 10\cdot 10} + \frac{2}{3} = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi = 41{,}4^\circ} \qquad \textbf{(2 p)}$$

$$v_H = \sqrt{gR\cos\varphi} = \sqrt{10 \cdot 10 \cdot \frac{3}{4}} = 5\sqrt{3}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 8{,}66\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad \textbf{(1 p)}$$

(Eddig összesen: 10 p)

2. szakasz – ferde hajítás: Az ábrán látható koordinátarendszert felvéve: $x_0 = R\sin\varphi$, ahol $\sin\varphi = \sin 41{,}1° = \sqrt{7}/4$. A kezdősebesség x és y komponense: $v_{x0} = v_H \sin\varphi$ ill. $v_{y0} = v_H\cos\varphi$. Így a ferde hajítást leíró egyenletek:

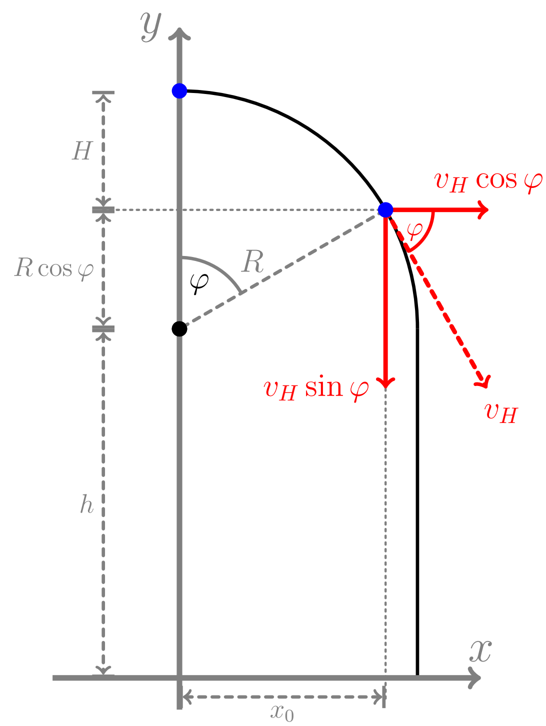
$$\begin{cases} x(t) = R\sin\varphi + v_H\cos\varphi \cdot t \\ y(t) = h + R\cos\varphi - v_H\sin\varphi\cdot t - \dfrac{g}{2}\cdot t^2 \end{cases}$$

Az utóbbi segítségével meghatározhatjuk az esés idejét:

$$0 = h + R\cos\varphi - v_H\sin\varphi\cdot T - \frac{g}{2}\cdot T^2$$

$$0 = 50 + 10\cdot\frac{3}{4} - 5\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}\cdot T - 5\cdot T^2$$

$$5\cdot T^2 + 5{,}728\cdot T - 57{,}5 = 0$$



Ennek a másodfokú egyenletnek fizikailag értelmes (pozitív) megoldása: $T = 2{,}87\,\mathrm{s}$
Ahonnan a földetérés x koordinátája:

$$x(T) = R\sin\varphi + v_H\cos\varphi\cdot T = 10\cdot\frac{\sqrt{7}}{4} + 5\sqrt{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot 2{,}87 = \underline{\underline{25{,}26\,\mathrm{m}}}$$

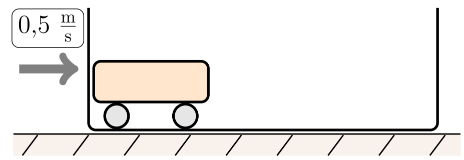
(8 p)

A teljes magasság ismeretében ($h + R = 60\,\mathrm{m}$) a kupola tetejétől való távolság Pitagorasz tétellel adódik:

$$d = \sqrt{60^2 + 25{,}26^2} = \underline{\underline{65{,}1\,\mathrm{m}}} \qquad \textbf{(2 p)}$$

12/2. feladat: Vízszintes talajon álló, 10 kg tömegű, 2 m hosszú láda egyik végébe 2 kg tömegű, 20 cm hosszú kiskocsit helyezünk, majd a ládát 0,5 m/s sebességgel meglökjük olyan irányban, hogy a láda fala a kiskocsit 0,5 m/s sebességgel magával ragadja. A talaj és a láda között a tapadási és a csúszási súrlódási együttható egyaránt 0,1, a kiskocsi gördülési ellenállását hanyagoljuk el.

a) A meglökés után mennyi idővel ütközik a kiskocsi a láda szemközti oldalának?
b) Mekkora lesz a kiskocsi és a láda sebessége az ütközést követően, ha az ütközés tökéletesen rugalmatlan?
c) Mikor áll le minden mozgás? Számoljon $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$-tel!



12/2. Megoldás

Adatok & jelölések: $M = 10\,\mathrm{kg}$; $L = 2\,\mathrm{m}$; $m = 2\,\mathrm{kg}$; $l = 20\,\mathrm{cm} = 0{,}2\,\mathrm{m}$; $v_0 = 0{,}5\,\mathrm{m/s}$; $\mu_0 = \mu = 0{,}1$.

Ad a) A kezdetben v_0 sebességgel meginduló dobozt $F_s = \mu\, N = \mu\,(m+M)\,g$ súrlódási erő fékezi, hiszen a dobozra $N = (M+m)\,g$ nyomó erő hat.

Így a doboz lassul: $F_s = M \cdot a_\mathrm{D} \quad \Rightarrow \quad a_\mathrm{D} = \dfrac{F_s}{M} = \dfrac{\mu\,(m+M)\,g}{M} = \dfrac{0{,}1\cdot(10+2)\cdot 10}{10} = 1{,}2\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ **(3 p)**

A kocsi elejének koordinátája az időben: $x_\mathrm{K}(t) = l + v_0 \cdot t$

A doboz falának koordinátája az időben: $x_\mathrm{D}(t) = L + v_0 \cdot t - \dfrac{a_\mathrm{D}}{2} t^2$

Vigyázat! A doboz T_D idő múlva megáll: $v_\mathrm{D} = a_\mathrm{D} \cdot T_\mathrm{D} \quad \Rightarrow \quad T_\mathrm{D} = \dfrac{v_\mathrm{D}}{a_\mathrm{D}} = \dfrac{0{,}5}{1{,}2} = 0{,}4167\,\mathrm{s}$ **(4 p)**

1. szakasz: Kezdettől – a doboz megállásáig
$x_\mathrm{K}(T_\mathrm{D}) = l + v_0 \cdot T_\mathrm{D} = 0{,}2 + 0{,}5 \cdot 0{,}4167 = 0{,}408\,\mathrm{m}$
$x_\mathrm{D}(T_\mathrm{D}) = L + v_0 \cdot T_\mathrm{D} - \dfrac{a_\mathrm{D}}{2} T_\mathrm{D}^2 = 2 + 0{,}5 \cdot 0{,}4167 - \dfrac{1{,}2}{2} \cdot 0{,}4167^2 = 2{,}104\,\mathrm{m}$
Tehát valóban amikor a doboz megáll a kocsi még nem érte el a falát.

2. szakasz: A doboz megállásától – az ütközésig. A doboz fala ekkor $X_\mathrm{D} = 2{,}104\,\mathrm{m}$-en áll.

$$l + v_0 \cdot T_\text{ütk} = X_D \quad \Rightarrow \quad T_\text{ütk} = \frac{X_D - l}{v_0} = \frac{2{,}104 - 0{,}2}{0{,}5} = \underline{\underline{3{,}808\,\mathrm{s}}} \qquad \textbf{(5 p)}$$

(Az a) rész összesen: 12 p)

Ad b) Tökéletesen rugalmatlan az ütközés, tehát ütközés után a kocsi és a doboz együtt mozognak. A lendület megmaradása miatt:

$$m \cdot v_0 = (m+M) \cdot V \quad \Rightarrow \quad V = \frac{m \cdot v_0}{m+M} = \frac{2 \cdot 0{,}5}{12} = \underline{\underline{0{,}083\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}} \qquad \textbf{(4 p)}$$

Ad c) Az ütközés után kezdetben V sebességgel mozgó dobozt+kocsi együttest továbbra is az $F_s = \mu\, N = \mu\,(m+M)\,g$ súrlódási erő fékezi, így a lassulás:

$$F_s = (m+M) \cdot a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{F_s}{m+M} = \mu\, g = 0{,}1 \cdot 10 = 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2},$$

$$\text{és a megálláshoz szükséges idő:} \quad T_\text{stop} = \frac{V}{a} = \underline{\underline{0{,}083\,\mathrm{s}}}. \qquad \textbf{(4 p)}$$

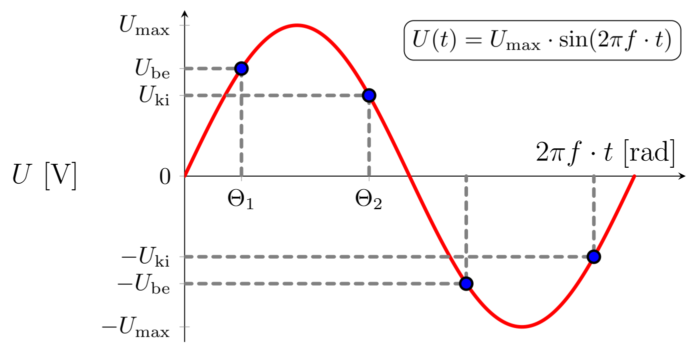
Tehát az indulástól számítva $T_\text{stop} + T\text{ütk} = 0{,}083 + 3{,}808 = 3{,}892\,\mathrm{s}$ múlva áll el minden mozgás.

12/3. feladat: Egy 230 V-os 50 Hz-es neon lámpa a vele sorbakötött ellenállással együtt akkor kezd világítani, amikor a rá jutó feszültség 116 V, illetve kialszik, ha a feszültség kisebb mint 87 V. (a) Mennyi a neonlámpa villogási frekvenciája? (b) A lámpa működése alatt annak hány százalékában világít a lámpa?

12/3. Megoldás

Adatok & jelölések: $U_{\text{eff}} = 230\,\text{V}$; $f = 50\,\text{Hz}$; $U_{\text{be}} = 116\,\text{V}$; $U_{\text{ki}} = 87\,\text{V}$.

A mellékelt grafikonon vázoltuk a szinuszos váltakozó feszültséget: **(Helyes ábra: 5 p)**



$$U(t) = U_{\max} \cdot \sin(2\pi f \cdot t)$$

A csúcsértéket az effektív feszültség értékből számíthatjuk:

$$U_{\max} = \sqrt{2} \cdot U_{\text{eff}} = \sqrt{2} \cdot 230\,\text{V} = 325{,}3\,\text{V} \qquad \textbf{(1 p)}$$

Az ábrán berajzoltuk a világítás be és kikapcsolódásának feszültség értékeit.

Ad (a) A feszültség minden félperiódusában van fölvillanás, hisz a neonlámpa számára mindegy a feszültség előjele csak a nagysága számít. Így a villogás frekvenciája: $f_v = 2 \cdot f = \underline{\underline{100\,\text{Hz}}}$ **(4 p)**

Ad (b) Visszakeresve az egyes határfeszültségekhez tartozó szögeket:

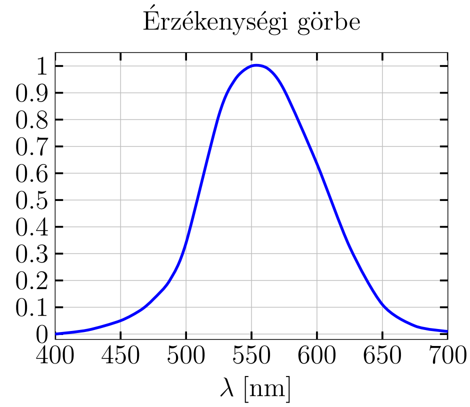
$$U_{\text{be}} = U_{\max} \cdot \sin\Theta_1 \quad \Rightarrow \quad \Theta_1 = \arcsin\left[\frac{116}{\sqrt{2} \cdot 230}\right] = 0{,}36 = 20{,}9^\circ \qquad \textbf{(3 p)}$$

$$U_{\text{ki}} = U_{\max} \cdot \sin\Theta_2 \quad \Rightarrow \quad \Theta_2 = \pi - \arcsin\left[\frac{87}{\sqrt{2} \cdot 230}\right] = 2{,}87 = 164{,}5^\circ \qquad \textbf{(3 p)}$$

kiszámíthatjuk, hogy a π félperiódus hány százalékában világít a lámpa:

$$\eta = \frac{\Theta_2 - \Theta_1}{\pi} = \frac{2{,}87 - 0{,}36}{\pi} = 0{,}8 = \underline{\underline{80\%}} \qquad \textbf{(4 p)}$$

12/4. feladat: Egy fényforrás erősségét mérhetjük az időegység által kisugárzott energiával (abszolút intenzitás), de ez a definíció nem veszi figyelembe azt a tényt, hogy az emberi szem érzékenysége függ a fény hullámhosszától. Az érzékenységet is figyelembe vevő intenzitást fényáramnak nevezzük, melynek SI egysége a lumen (lm). 1 lumen a fényárama annak a fényforrásnak, amely 540 THz-es egyszínű (monokromatikus) fényt bocsát ki és kisugárzott energiája másodpercenként 1/683 J. Az emberi szem az ennek a frekvenciának megfelelő zöld színű fényre a legérzékenyebb. (a) Mekkora ennek hullámhossza vákuumban? Más hullámhosszakon a fényáram a szemnek az ábrán mutatott standard által rögzített érzékenységével arányosan kisebb.



Az egyszerűség kedvéért tegyük föl, hogy egy “fehér” 400 lm-es LED lámpa fénye csak három monokromatikus komponenst tartalmaz: éppen a fönt jelzett zöld színt, egy 450 nm-es kék komponenst, amelynek abszolút intenzitása 0,8-szerese és egy 650 nm-es vörös komponenst, amelynek abszolút intenzitása 2-szerese a zöld komponensnek. A lámpa fogyasztása 5 W. (b) Mennyi a lámpa abszolút intenzitásra vonatkoztatott hatásfoka és mennyi a fényáramra vonatkoztatott hatásfok?
(c) A hálózatból fölvett teljesítmény hány százaléka fordítódik a lámpa hőmérsékletének növelésére?

12/4. Megoldás

Adatok & jelölések: $\nu_1 = 540\,\mathrm{THz} = 5{,}4 \cdot 10^{14}\,\mathrm{Hz}$; $\Delta t = 1\,\mathrm{s}$; $1\,\mathrm{lm} = 1/683\,\mathrm{W}$; $I_{\mathrm{rel}} = 400\,\mathrm{lm}$; $\lambda_2 = 450\,\mathrm{nm}$; $\lambda_3 = 650\,\mathrm{nm}$; $P = 5\,\mathrm{W}$; $c = 299\,792\,458\,\mathrm{m/s}$.

Ad (a) A $\nu_1 = 540\,\mathrm{THz}$-es foton hullámhossza vákuumban:

$$c = \lambda \cdot \nu \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \frac{c}{\nu_1} = \frac{299\,792\,458}{5{,}4 \cdot 10^{14}} = 5{,}55 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m} = \underline{\underline{555\,\mathrm{nm}}} \qquad \mathbf{(2\ p)}$$

Ad (b) Foglaljuk össze táblázatban mit tudunk a különböző hullámhosszú komponensekről. A szem érzékenységét a mellékelt grafikonról olvashatjuk le.

	hullámhossz	érzékenység	abszolút intenzitás
zöld	556 nm	1	I_{Z}
kék	450 nm	0,05	$0{,}8 \cdot I_{\mathrm{Z}}$
piros	650 nm	0,1	$2 \cdot I_{\mathrm{Z}}$

A fényáram így kifejezhető az abszolút intenzitásokkal:

$$400\,\mathrm{lm} = I_{\mathrm{Z}}\,(1 + 0{,}05 \cdot 0{,}8 + 0{,}1 \cdot 2) = 1{,}24 \cdot I_{\mathrm{Z}} \qquad \mathbf{(6\ p)}$$

$$\frac{400}{683}\,\mathrm{W} = 1{,}24 \cdot I_{\mathrm{Z}} \qquad \mathbf{(átváltás{:}\ 2\ p)} \quad \Rightarrow \quad I_{\mathrm{Z}} = \frac{400}{683 \cdot 1{,}24}\,\mathrm{W} = 0{,}47\,\mathrm{W}$$

Az abszolút intenzitásra vonatkoztatott hatásfok és a fényáramra vonatkoztatott hatásfok:

$$\eta_{\mathrm{sug}} = \frac{I_{\mathrm{Z}}\,(1 + 0{,}8 + 2)}{5\,\mathrm{W}} = \frac{1{,}79\,\mathrm{W}}{5\,\mathrm{W}} = \underline{\underline{0{,}36\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{W}}}} \quad \mathbf{(4\ p)}; \qquad \eta_{\mathrm{fenyaram}} = \frac{400\,\mathrm{lm}}{5\,\mathrm{W}} = \underline{\underline{80\,\frac{\mathrm{lm}}{\mathrm{W}}}} \quad \mathbf{(2\ p)}$$

Ad (c) A föntiek alapján a betáplált teljesítmény 36% hagyja el a lámpát sugárzásként, míg a maradék melegíti a rendszert: $1 - \eta_{\mathrm{sug}} = 1 - 0{,}36 = 0{,}64 = \underline{\underline{64\%}}$ **(4 p)**

Budó Ágoston Fizikai Feladatmegoldó Verseny – Szakközép A Megoldások

A megoldások „tájékoztató jellegűek”, egy-egy lehetséges megoldási utat mutatnak be.
Minden más helyes megoldás is 20 pontot ér.
(A megoldások során a számolásokban csak ott írjuk ki a mértékegységet, ahol nem SI egységeket használunk.)

A/1. feladat: Filmekben gyakori, hogy amikor valamely szereplő elsüti a puskáját, akkor a visszalökő erőtől hátraesik. Tegyük fel, hogy a lövedék tömege 0,01 kg, sebessége amikor elhagyja a fegyvert 720 m/s. Legyen a lövöldöző hősnő tömege puskával együtt 51 kg, és tegyük fel, hogy a lövést álló helyzetben hajtja végre.
a) Mekkora a visszalökés sebessége?
b) Mekkora lesz a visszalökés sebessége, ha vaktölténnyel lő (ahogy vélhetően a filmforgatásnál történik), amelynek tömege $5 \cdot 10^{-4}$ kg és a sebessége 720 m/s?

A/1. Megoldás

Adatok & jelölések: $m_1 = 0{,}01\,\mathrm{kg}$; $v_1 = 720\,\mathrm{m/s}$; $M = 51\,\mathrm{kg}$; $m_2 = 5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg}$; $v_2 = 720\,\mathrm{m/s}$.

A lendület megmaradását kihasználva a kilőtt golyó lendülete megegyezik a visszalökődő hősnő lendületével: **(4 p)**

$$M \cdot V = m \cdot v \quad \Rightarrow \quad V = \frac{m \cdot v}{M}.$$

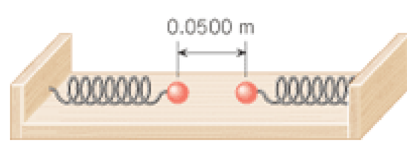
Ad a)

$$V_1 = \frac{m_1 \cdot v_1}{M} = \frac{0{,}01 \cdot 720}{51} = \underline{\underline{0{,}141\,\mathrm{m/s}}} \qquad \textbf{(8 p)}$$

Ad b)

$$V_2 = \frac{m_2 \cdot v_2}{M} = \frac{5 \cdot 10^{-4} \cdot 720}{51} = \underline{\underline{0{,}0071\,\mathrm{m/s}}} \qquad \textbf{(8 p)}$$

A/4. feladat: Két kisméretű golyó egyforma rugókhoz rögzítve vízszintes súrlódásmentes asztalon egy egyenes mentén helyezkedik el. Amikor a golyóknak nincs töltése a távolságuk 5 cm, és a rugók nyújtatlanok. Ha a golyóknak +1,6 μC nagyságú töltést adunk, a távolságuk megkétszereződik. A golyókat tekintsük pontszerűnek. Mekkora a rugóállandó?



A/4. Megoldás

Adatok & jelölések: $d = 5\,\mathrm{cm} = 0{,}05\,\mathrm{m}$; $q = 1{,}6\,\mu\mathrm{C} = 1{,}6 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}$; $k = 9 \cdot 10^9\,\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2}$.
A + töltéssel rendelkező golyók taszítják egymást. Az egyik golyóra ható taszító erő nagysága a Coulomb-törvény alapján:

$$F_\mathrm{C} = k \cdot \frac{q^2}{(2d)^2} \qquad \textbf{(5 p)} \qquad F_\mathrm{C} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{1{,}6^2 \cdot 10^{-12}}{0{,}1^2} = 2{,}304\,\mathrm{N}$$

Az egyes rugók megnyúlása $d/2$, így a rugóerő nagysága: $F_r = D \cdot \dfrac{d}{2}$ **(5 p)**
A testek egyensúlyban vannak, tehát a ható erők nagysága megegyezik:

$$k \cdot \frac{q^2}{(2d)^2} = D \cdot \frac{d}{2} \qquad \textbf{(5 p)} \qquad \Rightarrow \qquad D = k \cdot \frac{q^2}{2\,d^3} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{1{,}6^2 \cdot 10^{-12}}{2 \cdot 0{,}05^3} = \underline{\underline{92{,}16\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}} \qquad \textbf{(5 p)}$$

A/2. feladat: Egy ejtőernyős ugró először még csukott ernyővel 625 m-t esik 15 s alatt. Aztán kinyílik az ernyője és a következő 356 m-t 142 s alatt teszi meg.
a) Számolja ki az átlagsebességet amíg csukott ernyővel esik!
b) Számolja ki az átlagsebességet az ejtőernyős szakaszra!
c) Mekkora az átlagsebessége a teljes esésre?
d) Vázolja föl a sebesség-idő grafikont figyelembe véve a légellenállásokat! Az ernyő nélküli esésnél a sebesség kb. 5 s alatt állandósul, míg az ejtőernyős szakaszon ez már kb. 2 s alatt bekövetkezik.
e) Becsülje meg a maximális sebességet és a földetérés sebességét!

A/2. Megoldás

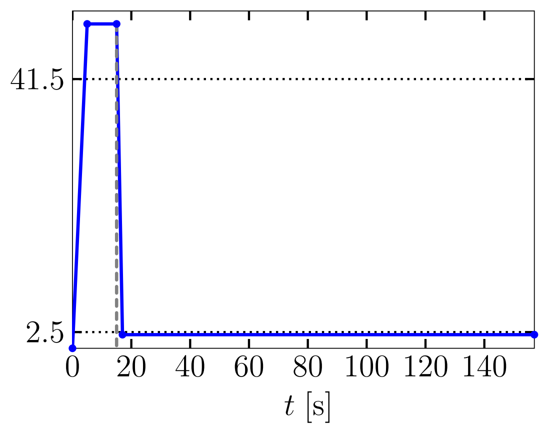
Adatok & jelölések: $s_1 = 625\,\mathrm{m}$; $\Delta t_1 = 15\,\mathrm{s}$; $s_2 = 356\,\mathrm{m}$; $\Delta t_2 = 142\,\mathrm{s}$; $\tau_1 = 5\,\mathrm{s}$; $\tau_2 = 2\,\mathrm{s}$.

Ad a) 1. szakasz: $\overline{v}_1 = \dfrac{s_1}{\Delta t_1} = \dfrac{625}{15} = \underline{\underline{41{,}67\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$ **(2 p)**

Ad b) 2. szakasz: $\overline{v}_2 = \dfrac{s_2}{\Delta t_2} = \dfrac{356}{142} = \underline{\underline{2{,}5\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$ **(2 p)**

Ad c) $\overline{v} = \dfrac{s_1 + s_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2} = \dfrac{625 + 356}{15 + 142} = \underline{\underline{6{,}25\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$ **(2 p)**

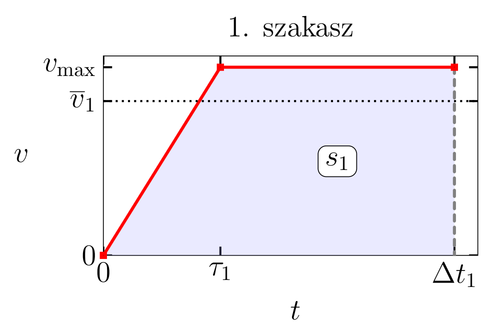
Ad d) A szöveg alapján a vázlatos grafikont az ábra mutatja. **(a grafikon: 6 p)**



Ad e) Az 1. szakaszon (ernyő nélküli esés) az állandósuló (maximális) sebességet $v_{\max}$-al jelölve, és az utat a vázlatos görbe alatti területtel számolva:

$$\frac{\tau_1 \cdot v_{\max}}{2} + (\Delta t_1 - \tau_1) \cdot v_{\max} = s_1$$

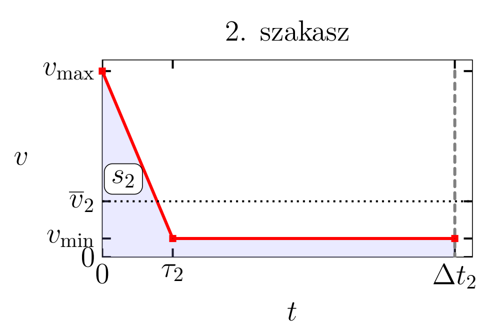
$$2{,}5 \cdot v_{\max} + 10 \cdot v_{\max} = 625 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{v_{\max} = 50\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}} \qquad \textbf{(4 p)}$$



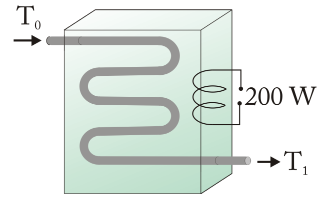
A 2. szakaszon (ejtőernyővel esés) az állandósuló (minimális) sebességet $v_{\min}$-el jelölve és az utat a vázlatos görbe alatti területtel számolva:

$$\tau_2 \cdot \frac{v_{\max} + v_{\min}}{2} + (\Delta t_2 - \tau_2) \cdot v_{\min} = s_2$$

$$(50 + v_{\min}) + 140 \cdot v_{\min} = 356 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{v_{\min} = 2{,}17\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}} \qquad \textbf{(4 p)}$$



A/3. feladat: Az ábrán légbefúvásos elektromos fűtőberendezés látható. A hőszigetelt tartályban lévő vizet 200 W teljesítményű elektromos árammal melegítik. A víz hőt ad át a 10^5 Pa nyomású 7° C-os a fűtőberendezésbe beszívott, csőspirálban áthaladó levegőnek. A folyamatos működés során mind a víz, mind a terembe befújt levegő hőmérséklete 27° C-os. Mekkora a másodpercenként beszívott, illetve a terembe befújt levegő térfogata? A levegő nyomása mindvégig 10^5 Pa.



A/3. Megoldás:

Adatok & jelölések: $P = 200\,\mathrm{W}$; $p_0 = 10^5\,\mathrm{Pa}$; $T_{\mathrm{be}} = 7°\,\mathrm{C} = 280\,\mathrm{K}$; $T_{\mathrm{ki}} = 27°\,\mathrm{C} = 300\,\mathrm{K}$; $t = 1\,\mathrm{s}$.
A folyamat stacionárius, a jellemző mennyiségek értéke állandósult. Így a másodpercenként beszívott illetve kifújt levegő térfogatára (V_{be},V_{ki}) és anyagmennyiségére ($n_{\mathrm{be}} = n_{\mathrm{ki}} = n$) teljesül az állapot egyenlet.
(1) $p_0 \cdot V_{\mathrm{be}} = n \cdot R \cdot T_{\mathrm{be}}$, illetve
(2) $p_0 \cdot V_{\mathrm{ki}} = n \cdot R \cdot T_{\mathrm{ki}}$. **(2 p)**
A fűtés során a víznek átadott energia teljes egészében a gázt melegíti (a víz hőmérséklete állandó), így a gáz által felvett hő másodpercenként: $Q = P \cdot t$. **(2 p)**
Az első főtétel alapján, a levegőt ideális gáznak tekintve, a felvett hő:
$Q = \Delta E_b - W = \frac{f}{2} n \cdot R \cdot (T_{\mathrm{ki}} - T_{\mathrm{be}}) + p_0(V_{\mathrm{ki}} - V_{\mathrm{be}})$.
Felhasználva továbbá (1)-et és (2)-t: $P \cdot t = \left(\frac{f}{2} + 1\right) n \cdot R \cdot (T_{\mathrm{ki}} - T_{\mathrm{be}})$ (Vagy érvelhetünk az állandó nyomáson érvényes molhővel).
Ebből az $n \cdot R$ szorzatot érdemes kifejezni:

$$n \cdot R = \frac{P \cdot t}{\left(\frac{f}{2} + 1\right)(T_{\mathrm{ki}} - T_{\mathrm{be}})} = \frac{200 \cdot 1}{\frac{7}{2} \cdot 20} = \frac{20}{7} \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}},$$

amivel a másodpercenként beszívott és befújt térfogat kifejezhető:

$$V_{\mathrm{be}} = n \cdot R \cdot \frac{T_{\mathrm{be}}}{p_0} = \frac{20}{7} \cdot \frac{280}{10^5} = 8 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 = \underline{\underline{8\,\ell}}; \qquad \textbf{(8 p)}$$

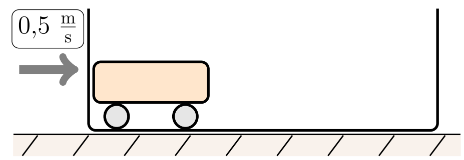
$$V_{\mathrm{ki}} = n \cdot R \cdot \frac{T_{\mathrm{ki}}}{p_0} = \frac{20}{7} \cdot \frac{300}{10^5} = 8{,}57 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 = \underline{\underline{8{,}57\,\ell}}. \qquad \textbf{(8 p)}$$

Budó Ágoston Fizikai Feladatmegoldó Verseny – Szakközép B Megoldások

A megoldások „tájékoztató jellegűek", egy-egy lehetséges megoldási utat mutatnak be.
Minden más helyes megoldás is 20 pontot ér.
(A megoldások során a számolásokban csak ott írjuk ki a mértékegységet, ahol nem SI egységeket használunk.)

B/1. feladat: Vízszintes talajon álló, 10 kg tömegű, 2 m hosszú láda egyik végébe 2 kg tömegű, 20 cm hosszú kiskocsit helyezünk, majd a ládát 0,5 m/s sebességgel meglökjük olyan irányban, hogy a láda fala a kiskocsit 0,5 m/s sebességgel magával ragadja. A talaj és a láda között a tapadási és a csúszási súrlódási együttható egyaránt 0,1, a kiskocsi gördülési ellenállását hanyagoljuk el.

a) A meglökés után mennyi idővel ütközik a kiskocsi a láda szemközti oldalának?
b) Mekkora lesz a kiskocsi és a láda sebessége az ütközést követően, ha az ütközés tökéletesen rugalmatlan?
c) Mikor áll le minden mozgás? Számoljon $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$-tel!



B/1. Megoldás

Adatok & jelölések: $M = 10\,\mathrm{kg}$; $L = 2\,\mathrm{m}$; $m = 2\,\mathrm{kg}$; $l = 20\,\mathrm{cm} = 0{,}2\,\mathrm{m}$; $v_0 = 0{,}5\,\mathrm{m/s}$; $\mu_0 = \mu = 0{,}1$.

Ad a) A kezdetben v_0 sebességgel meginduló dobozt $F_s = \mu N = \mu\,(m+M)\,g$ súrlódási erő fékezi, hiszen a dobozra $N = (M+m)\,g$ nyomó erő hat.

Így a doboz lassul: $F_s = M \cdot a_{\mathrm{D}} \quad \Rightarrow \quad a_{\mathrm{D}} = \dfrac{F_s}{M} = \dfrac{\mu\,(m+M)\,g}{M} = \dfrac{0{,}1 \cdot (10+2) \cdot 10}{10} = 1{,}2\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ **(3 p)**

A kocsi elejének koordinátája az időben: $x_{\mathrm{K}}(t) = l + v_0 \cdot t$

A doboz falának koordinátája az időben: $x_{\mathrm{D}}(t) = L + v_0 \cdot t - \dfrac{a_{\mathrm{D}}}{2} t^2$

Vigyázat! A doboz T_{D} idő múlva megáll: $v_{\mathrm{D}} = a_{\mathrm{D}} \cdot T_{\mathrm{D}} \quad \Rightarrow \quad T_{\mathrm{D}} = \dfrac{v_{\mathrm{D}}}{a_{\mathrm{D}}} = \dfrac{0{,}5}{1{,}2} = 0{,}4167\,\mathrm{s}$ **(4 p)**

1. szakasz: Kezdettől – a doboz megállásáig
$x_{\mathrm{K}}(T_{\mathrm{D}}) = l + v_0 \cdot T_{\mathrm{D}} = 0{,}2 + 0{,}5 \cdot 0{,}4167 = 0{,}408\,\mathrm{m}$
$x_{\mathrm{D}}(T_{\mathrm{D}}) = L + v_0 \cdot T_{\mathrm{D}} - \dfrac{a_{\mathrm{D}}}{2} T_{\mathrm{D}}^2 = 2 + 0{,}5 \cdot 0{,}4167 - \dfrac{1{,}2}{2} \cdot 0{,}4167^2 = 2{,}104\,\mathrm{m}$
Tehát valóban amikor a doboz megáll a kocsi még nem érte el a falát.

2. szakasz: A doboz megállásától – az ütközésig. A doboz fala ekkor $X_{\mathrm{D}} = 2{,}104\,\mathrm{m}$-en áll.

$$l + v_0 \cdot T_{\text{ütk}} = X_D \quad \Rightarrow \quad T_{\text{ütk}} = \frac{X_D - l}{v_0} = \frac{2{,}104 - 0{,}2}{0{,}5} = \underline{\underline{3{,}808\,\mathrm{s}}} \qquad \textbf{(5 p)}$$

(Az a) rész összesen: 12 p)

Ad b) Tökéletesen rugalmatlan az ütközés, tehát ütközés után a kocsi és a doboz együtt mozognak. A lendület megmaradása miatt:

$$m \cdot v_0 = (m+M) \cdot V \quad \Rightarrow \quad V = \frac{m \cdot v_0}{m+M} = \frac{2 \cdot 0{,}5}{12} = \underline{\underline{0{,}083\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}} \qquad \textbf{(4 p)}$$

Ad c) Az ütközés után kezdetben V sebességgel mozgó dobozt+kocsi együttest továbbra is az

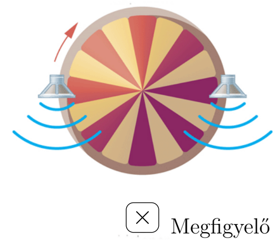
$F_s = \mu N = \mu\,(m + M)\,g$ súrlódási erő fékezi, így a lassulás:

$$F_s = (m + M) \cdot a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{F_s}{m + M} = \mu\,g = 0{,}1 \cdot 10 = 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},$$

$$\text{és a megálláshoz szükséges idő:} \quad T_{\text{stop}} = \frac{V}{a} = \underline{\underline{0{,}083\,\mathrm{s}}}. \qquad \mathbf{(4\ p)}$$

Tehát az indulástól számítva $T_{\text{stop}} + T\text{ütk} = 0{,}083 + 3{,}808 = 3{,}892\,\mathrm{s}$ múlva áll el minden mozgás.

Körhinta felülnézetből



Megfigyelő

B/2. feladat: Egy 9 m sugarú körhinta két átellenes pontján a rajznak megfelelően hangszórókat rögzítettek. A körhinta egyenletes sebességgel forog miközben mindkét hangszóró 100 Hz frekvenciájú hangot bocsát ki. A hang terjedési sebessége levegőben 340 m/s. A körhinta 20 másodpercenként tesz egy fordulatot ezért 20 másodpercenként a hangerőben egy lüktetést hallunk. Létezik azonban egy további lüktetés a képen látható helyzet szerint. Mekkora ennek a frekvenciája?

B/2. Megoldás

Adatok & jelölések: $R = 9\,\mathrm{m}$; $T = 20\,\mathrm{s}$; $f_0 = 100\,\mathrm{Hz}$; $c = 340\,\mathrm{m/s}$.
A körhintán lévő 2 hangszóró az ábrázolt helyzetben a kerületi sebességgel közeledik illetve távolodik a megfigyelőhöz képest:

$$v = \omega \cdot R = \frac{2\pi}{T} \cdot R = \frac{2\pi}{20} \cdot 9 = 2{,}83\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad \mathbf{(2\ p)}$$

A Doppler-effektus miatt a megfigyelőhöz közelítő hangszóró frekvenciája kissé növekszik (hullámhossz csökken):

$$f_K = f_0 \cdot \frac{c}{c - v} = 100 \cdot \frac{340}{340 - 2{,}83} = 100{,}83\,\mathrm{Hz}, \qquad \mathbf{(4\ p)}$$

míg a távolodó hangszóró frekvenciája csökken (hullámhossza nő):

$$f_T = f_0 \cdot \frac{c}{c + v} = 100 \cdot \frac{340}{340 + 2{,}83} = 99{,}18\,\mathrm{Hz}, \qquad \mathbf{(4\ p)}$$

A két közel azonos frekvenciájú hanghullám interferenciája lebegést hoz létre, melynek frekvenciája:

$$f_l = f_K - f_T = 1{,}66\,\mathrm{Hz} = 1{,}66\,\frac{1}{\mathrm{s}}$$

Tehát $\underline{\underline{\text{másodpercenként 1,66 lüktetést}}}$ hallunk. **(10 p)**

Megjegyzés: Addíciós tételek alapján a két közel azonos frekvenciájú rezgés összege:

$$A\sin(2\pi f_K \cdot t) + A\sin(2\pi f_T \cdot t) = 2A\sin\left(2\pi\,\frac{f_K + f_T}{2} \cdot t\right) \cdot \cos\left(2\pi\,\frac{f_K - f_T}{2} \cdot t\right)$$

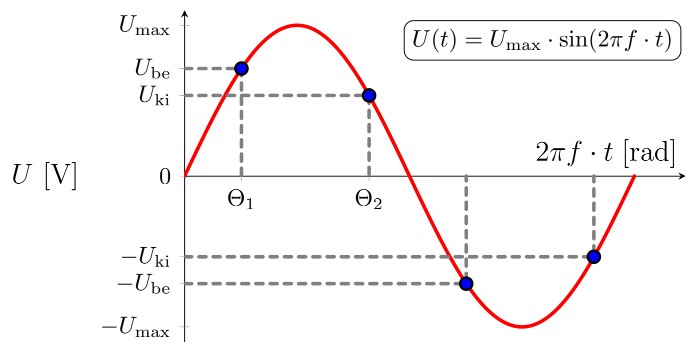
Tehát a két frekvencia átlagával jellemzett szinuszos rezgés még egy koszinuszos burkolót is kap, ez okozza a kb 100 Hz-es hang elhalkulását majd felerősödését a koszinusz függvény minden egyes félperiódusában, így a lüktetés frekvenciája $f_K - f_T$.

B/3. feladat: Egy 230 V-os 50 Hz-es neon lámpa a vele sorbakötött ellenállással együtt akkor kezd világítani, amikor a rá jutó feszültség 116 V, illetve kialszik, ha a feszültség kisebb mint 87 V. (a) Mennyi a neonlámpa villogási frekvenciája? (b) A lámpa működése alatt annak hány százalékában világít a lámpa?

B/3. Megoldás

Adatok & jelölések: $U_{\text{eff}} = 230\,\text{V}$; $f = 50\,\text{Hz}$; $U_{\text{be}} = 116\,\text{V}$; $U_{\text{ki}} = 87\,\text{V}$.

A mellékelt grafikonon vázoltuk a szinuszos váltakozó feszültséget: **(Helyes ábra: 5 p)**



$$U(t) = U_{\text{max}} \cdot \sin(2\pi f \cdot t)$$

A csúcsértéket az effektív feszültség értékből számíthatjuk:

$$U_{\text{max}} = \sqrt{2} \cdot U_{\text{eff}} = \sqrt{2} \cdot 230\,\text{V} = 325{,}3\,\text{V} \qquad \textbf{(1 p)}$$

Az ábrán berajzoltuk a világítás be és kikapcsolódásának feszültség értékeit.

Ad (a) A feszültség minden félperiódusában van fölvillanás, hisz a neonlámpa számára mindegy a feszültség előjele csak a nagysága számít. Így a villogás frekvenciája: $f_v = 2 \cdot f = \underline{\underline{100\,\text{Hz}}}$ **(4 p)**

Ad (b) Visszakeresve az egyes határfeszültségekhez tartozó szögeket:

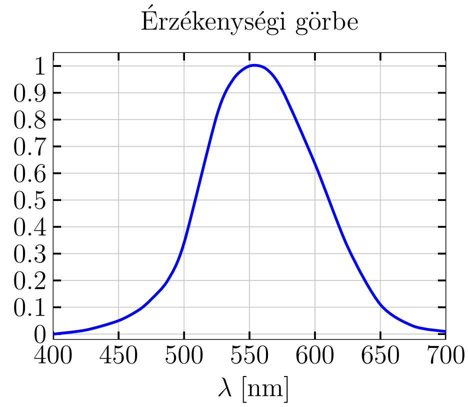
$$U_{\text{be}} = U_{\text{max}} \cdot \sin\Theta_1 \quad \Rightarrow \quad \Theta_1 = \arcsin\left[\frac{116}{\sqrt{2} \cdot 230}\right] = 0{,}36 = 20{,}9^\circ \qquad \textbf{(3 p)}$$

$$U_{\text{ki}} = U_{\text{max}} \cdot \sin\Theta_2 \quad \Rightarrow \quad \Theta_2 = \pi - \arcsin\left[\frac{87}{\sqrt{2} \cdot 230}\right] = 2{,}87 = 164{,}5^\circ \qquad \textbf{(3 p)}$$

kiszámíthatjuk, hogy a π félperiódus hány százalékában világít a lámpa:

$$\eta = \frac{\Theta_2 - \Theta_1}{\pi} = \frac{2{,}87 - 0{,}36}{\pi} = 0{,}8 = \underline{\underline{80\%}} \qquad \textbf{(4 p)}$$

B/4. feladat: Egy fényforrás erősségét mérhetjük az időegység által kisugárzott energiával (abszolút intenzitás), de ez a definíció nem veszi figyelembe azt a tényt, hogy az emberi szem érzékenysége függ a fény hullámhosszától. Az érzékenységet is figyelembe vevő intenzitást fényáramnak nevezzük, melynek SI egysége a lumen (lm). 1 lumen a fényárama annak a fényforrásnak, amely 540 THz-es egyszínű (monokromatikus) fényt bocsát ki és kisugárzott energiája másodpercenként 1/683 J. Az emberi szem az ennek a frekvenciának megfelelő zöld színű fényre a legérzékenyebb. (a) Mekkora ennek hullámhossza vákuumban? Más hullámhosszakon a fényáram a szemnek az ábrán mutatott standard által rögzített érzékenységével arányosan kisebb.



Az egyszerűség kedvéért tegyük föl, hogy egy “fehér” 400 lm-es LED lámpa fénye csak három monokromatikus komponenst tartalmaz: éppen a fönt jelzett zöld színt, egy 450 nm-es kék komponenst, amelynek abszolút intenzitása 0,8-szerese és egy 650 nm-es vörös komponenst, amelynek abszolút intenzitása 2-szerese a zöld komponensnek. A lámpa fogyasztása 5 W. (b) Mennyi a lámpa abszolút intenzitásra vonatkoztatott hatásfoka és mennyi a fényáramra vonatkoztatott hatásfok?
(c) A hálózatból fölvett teljesítmény hány százaléka fordítódik a lámpa hőmérsékletének növelésére?

B/4. Megoldás

Adatok & jelölések: $\nu_1 = 540\,\mathrm{THz} = 5{,}4\cdot 10^{14}\,\mathrm{Hz}$; $\Delta t = 1\,\mathrm{s}$; $1\,\mathrm{lm} = 1/683\,\mathrm{W}$; $I_{\mathrm{rel}} = 400\,\mathrm{lm}$; $\lambda_2 = 450\,\mathrm{nm}$; $\lambda_3 = 650\,\mathrm{nm}$; $P = 5\,\mathrm{W}$; $c = 299\,792\,458\,\mathrm{m/s}$.

Ad (a) A $\nu_1 = 540\,\mathrm{THz}$-es foton hullámhossza vákuumban:

$$c = \lambda\cdot\nu \quad\Rightarrow\quad \lambda_1 = \frac{c}{\nu_1} = \frac{299\,792\,458}{5{,}4\cdot 10^{14}} = 5{,}55\cdot 10^{-7}\,\mathrm{m} = \underline{\underline{555\,\mathrm{nm}}} \qquad \textbf{(2 p)}$$

Ad (b) Foglaljuk össze táblázatban mit tudunk a különböző hullámhosszú komponensekről. A szem érzékenységét a mellékelt grafikonról olvashatjuk le.

	hullámhossz	érzékenység	abszolút intenzitás
zöld	556 nm	1	I_{Z}
kék	450 nm	0,05	$0{,}8\cdot I_{\mathrm{Z}}$
piros	650 nm	0,1	$2\cdot I_{\mathrm{Z}}$

A fényáram így kifejezhető az abszolút intenzitásokkal:

$$400\,\mathrm{lm} = I_{\mathrm{Z}}\,(1 + 0{,}05\cdot 0{,}8 + 0{,}1\cdot 2) = 1{,}24\cdot I_{\mathrm{Z}} \qquad \textbf{(6 p)}$$

$$\frac{400}{683}\,\mathrm{W} = 1{,}24\cdot I_{\mathrm{Z}} \qquad \textbf{(átváltás: 2 p)} \quad\Rightarrow\quad I_{\mathrm{Z}} = \frac{400}{683\cdot 1{,}24}\,\mathrm{W} = 0{,}47\,\mathrm{W}$$

Az abszolút intenzitásra vonatkoztatott hatásfok és a fényáramra vonatkoztatott hatásfok:

$$\eta_{\mathrm{sug}} = \frac{I_{\mathrm{Z}}\,(1+0{,}8+2)}{5\,\mathrm{W}} = \frac{1{,}79\,\mathrm{W}}{5\,\mathrm{W}} = \underline{\underline{0{,}36\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{W}}}} \qquad \textbf{(4 p)}; \qquad \eta_{\mathrm{fenyaram}} = \frac{400\,\mathrm{lm}}{5\,\mathrm{W}} = \underline{\underline{80\,\frac{\mathrm{lm}}{\mathrm{W}}}} \qquad \textbf{(2 p)}$$

Ad (c) A föntiek alapján a betáplált teljesítmény 36% hagyja el a lámpát sugárzásként, míg a maradék melegíti a rendszert: $1 - \eta_{\mathrm{sug}} = 1 - 0{,}36 = 0{,}64 = \underline{\underline{64\%}}$ **(4 p)**