Budó Ágoston Fizikai Feladatmegoldó Verseny Megoldások 2014

A megoldások „tájékoztató jellegűek”, egy-egy lehetséges megoldási utat mutatnak be. Minden más helyes megoldás is 20 pontot ér.
(A megoldások során a számolásokban csak ott írjuk ki a mértékegységet ahol nem SI egységeket használunk.)

1. Feladat:

Egy vadász szurdokvölgyben áll, melynek szélén egymással szemben két, szinte függőleges sziklafal tornyosul. Röviddel azután, hogy elsüti a nála lévő puskát, három visszhangot hall. A második visszhang $1,6$ másodperccel érkezik az első visszhang után, míg a harmadik visszhang és a második között újabb $1,1$ másodperc telik el. A hely, ahol a vadász megállt, közelebb esik a jobboldali sziklafalhoz.

a) Mekkora távolságra van a két sziklafal egymástól, ha föltesszük, hogy a talajról nem verődik vissza a hang és a hangsebesség $343\,\mathrm{m/s}$?

b) A puska elsütését követően hány másodperc múlva hallotta meg az első visszhangot?

c) Ugyanezt kapnánk-e akkor is, ha a vadász pontosan a völgy közepén állna? (Válaszát indokolja!)

Megoldás: $c = 343\,\mathrm{m/s}$

Legyen a vadász távolsága a jobb oldali sziklafaltól x, a szurdok szélessége d.

Az első visszhang a jobboldali sziklafalról érkezik vissza $t_1 = \dfrac{2x}{c}$ múlva.

A második visszhang a bal oldali sziklafalról érkezik vissza $t_2 = \dfrac{2(d-x)}{c} = t_1 + 1,6\,\mathrm{s}$ múlva.

A harmadik visszhang oka, hogy a bal oldali falról visszaverődött hang a jobboldali falról is visszaverődik, így $t_3 = \dfrac{2d}{c} = t_2 + 1,1\,\mathrm{s}$. **(6 pont)**

Utóbbi 2 egyenlet különbségét véve: $t_3 - t_2 = 1,1\,\mathrm{s} = \dfrac{2x}{c} = t_1$.

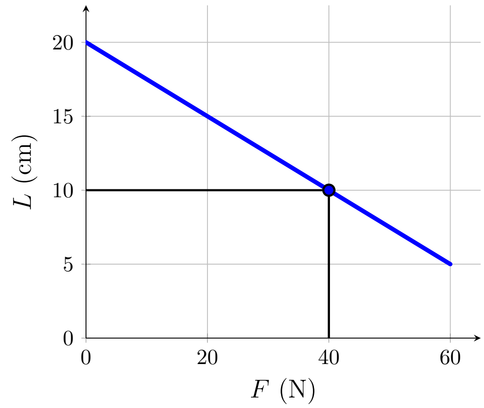
Ad b) Tehát az első visszhang $\underline{\underline{1,1\,\mathrm{s}}}$ múlva érkezett. ($x = 188,65\,\mathrm{m}$, de ez nem volt kérdés). **(4 pont)**

A második egyenletből felhasználva, hogy $1,1\,\mathrm{s} = \dfrac{2x}{c} = t_1$, kapjuk hogy $\dfrac{2d}{c} = 3,8\,\mathrm{s}$ $(= t_3)$.

Ad a) A szurdok szélessége így $d = \dfrac{c\,t_3}{2} = \underline{\underline{651,7\,\mathrm{m}}}$. **(4 pont)**

Ad c) <u>NEM</u>. Ha a vadász középen áll, akkor a legelső visszhang $t = \dfrac{d}{c} = 1,9\,\mathrm{s}$ múlva érkezik egyszerre a bal és jobboldali falról. A következő visszhanghoz újabb visszaverődés történik a falról, tehát ez újra $1,9\,\mathrm{s}$ múlva következik be, és így tovább. Vélhetően harmadik visszhang már nincs a sziklafalon történő elnyelődési veszteségek miatt. **(6 pont)**

2. Feladat:



Az ábra egy terheletlenül $20\,\mathrm{cm}$ hosszú rugó összenyomásához szükséges erő és a rugóhossz közti kapcsolatot mutatja.

a) Hány cm-rel kell a függőleges helyzetű, az asztalhoz rögzített rugót összenyomni ahhoz, hogy a rugóra helyezett $0,2\,\mathrm{kg}$ tömegű test a rugó aljától számítva $0,4\,\mathrm{m}$ magasra jusson?

b) Mekkora sebességgel érkezik a test a $0,4\,\mathrm{m}$ magasságra, ha a rugó összenyomását megkétszerezzük?

Megoldás: $L_0 = 0,2\,\mathrm{m}, \quad h = 0,4\,\mathrm{m}, \quad m = 0,2\,\mathrm{kg}, \quad g = 10\,\mathrm{m/s^2}.$
A grafikonból leolvasható a rugóállandó nagysága: $D = \dfrac{40N}{0,1m} = 400\,\mathrm{N/m}.$ **(2 pont)**

Ad a) A nyújtatlan rugót x távolsággal összenyomva (a test már rajta van), és ezt a helyzetet a magassági energia nullszintjének tekintve a test és rugóból álló rendszernek kezdetben csak rugalmas energiája, a véghelyzetben csak magassági energiája van. (Mivel a test nincs a rugóhoz rögzítve a test fölfelé mozgásában végül elhagyja a rugót).

$$\frac{1}{2}Dx^2 = mg(h-(L_0-x)) \qquad \textbf{(4 pont)}$$

Átrendezve és az adatokat beírva a következő másodfokú egyenletet kell megoldani:

$$100x^2 - x - 0,2 = 0. \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1 \pm 400 \cdot 0,2}}{200}\,\mathrm{m} = \frac{1 \pm 9}{200}\,\mathrm{m} = \frac{1 \pm 9}{2}\,\mathrm{cm}\,.$$

A pozitív gyök a fizikailag megfelelő megoldás, tehát a rugót $\underline{\underline{5\,\mathrm{cm}}}$-rel kell összenyomni. **(6 pont)**

Ad b) A kezdeti összenyomás $y = 2x = 0,1\,\mathrm{m}$. A különbség az előző energiaegyenlethez képest, hogy a testnek a felső helyzetben mozgási energiája is van.

$$\frac{1}{2}Dy^2 = mg(h-(L_0-y)) + \frac{1}{2}mv^2. \qquad \textbf{(4 pont)}$$

$v^2 = \dfrac{D}{m}y^2 - 2g(h - L_0 + y) = 14\,\mathrm{m^2/s^2}$, azaz $v = \sqrt{14}\,\mathrm{m/s} = \underline{\underline{3,74\,\mathrm{m/s}}}.$ **(4 pont)**

3. Feladat:

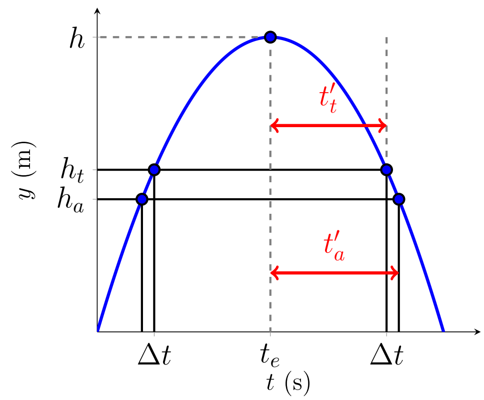
Az atomórákban cézium (^{133}Cs) atomokat használnak az idő mérésére. A legkorszerűbb változatukban egy körülbelül $10^{-6}\,\mathrm{K}$ hőmérsékletre hűtött Cs atomfelhőt vákuumban egy lézerimpulzussal fölfelé löknek $1\,\mathrm{m}$ magasságra. A függőleges hajítás során az atomok egyszer fölfelé, utána lefelé áthaladnak egy alul és fölül nyitott üregen, amelyben körülbelül $9,2\,\mathrm{GHz}$ frekvenciájú mikrohullámú elektromágneses mezőt keltenek. Az atomok belső állapota akkor változik meg, azaz akkor kerülnek gerjesztett állapotba, ha a frekvencia pontosan illeszkedik két adott belső energiaállapot különbségéhez. Ez szolgáltatja a másodperc mérhető definícióját.

a) Az üreg $10\,\mathrm{cm}$ magas és a középpontja $0,5\,\mathrm{m}$ magasságban van az induló atomfelhő fölött.

b) Mennyi idő alatt haladnak át az üregen az atomok fölfelé, illetve lefelé mozogva? Mennyi idő telik el a miután az atomok fölfelé elhagyják majd újra belépnek az üregbe?

c) Mekkora lendületet adjon a lézerimpulzus egy Cs atomnak, hogy az $1\,\mathrm{m}$ magasra jusson?

Megoldás:



Ad a) Függőleges hajítás történik. A sebesség illetve az elmozdulás mint az idő függvénye: $v_y = -gt + v_0$, $y(t) = -gt^2/2 + v_0 t$.

A csúcspontot akkor éri el 0 sebességgel az atomfelhő, amikor $v_y = 0$, azaz az emelkedési idő $t_e = v_0/g$, ezt a második egyenletbe írva az $y(t_e) = h$ emelkedési magasságból $v_0 = \sqrt{2gh} = 4,43\,\mathrm{m/s}$
(Ugyanezt kaphatjuk az energiamegmaradásból is.) **(3 pont)**

Az idő számítása úgy a legegyszerűbb, ha figyelembe vesszük, hogy a csúcspont elérésének időpillanatára nézve a mozgás időben (vagyis az $y(t) = -gt^2/2 + v_0 t$ parabola a csúcspontján átmenő függőleges tengelyre nézve) szimmetrikus. A csúcspont elérését követően az atomok szabadesést végeznek. Így elegendő a szabadesést végző atomok esetén kiszámítani, hogy mennyi idő alatt teszik meg az üreg tetejéig $s_t = h - h_t = 0,45\,\mathrm{m}$ és az aljáig az $s_a = h - h_a = 0,55\,\mathrm{m}$ távolságot. **(5 pont)**
A két idő $t'_t = \sqrt{2g/s_t} = 0,3029\,\mathrm{s}$
illetve $t'_a = \sqrt{2g/s_a} = 0,3349\,\mathrm{s}$
A kettő különbsége a leesés közben az üregben töltött idő $\Delta t = \underline{\underline{0,032\,\mathrm{s}}}$ **(2 pont)**.
A jelzett szimmetria miatt az üregben töltött idő fölfelé is ugyanennyi, (azaz az üregben eltöltött idő összesen $2\Delta t = \underline{\underline{0,064\,\mathrm{s}}}$)

Másik módszer: Az elérési időket meghatározhatjuk a $-gt_a^2/2 + v_0 t_a = h_a$, és a $-gt_t^2/2 + v_0 t_t = h_t$ másodfokú egyenletek gyökeiből is ahol a kisebb gyökök a fölfelé haladás, a nagyobb gyökök a lefelé esés során történő elérési időpontokat adják. A második egyenlet kisebb gyökéből levonva az első kisebbik gyökét, majd ugyanezt a nagyobbik gyökökkel is elvégezve kapjuk, hogy az üregben töltött idő mind fölfelé mind lefelé ugyanakkora: $\Delta t = \underline{\underline{0,032\,\mathrm{s}}}$ **(Ez is 10 pont)**

Ad b) Az üreg fölött lesznek az atomok $2t'_t = \underline{\underline{0,606\,\mathrm{s}}}$ ideig. **(3 pont)**

Ad c) Egy céziumatom lendülete induláskor $p_0 = m_{\mathrm{Cs}} v_0$.
Az m_{Cs} atomi tömeget vagy a moltömeg az $M = 0,133\,\mathrm{kg/mol}$ és az $N_A = 6 \cdot 10^{23}\,\mathrm{atom/mol}$ (Avogadro szám) hányadosából, vagy a táblázatból kiolvasható 1atomi tömegegység $= 1\,\mathrm{Dalton} = 1.66 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$ és a 133 szorzatából kaphatjuk meg.$m_{\mathrm{Cs}} = 2,21 \cdot 10^{-25}\,\mathrm{kg}$
$p_0 = \underline{\underline{9,77 \cdot 10^{-25}\,\mathrm{kgm/s}}}$. **(7 pont)**

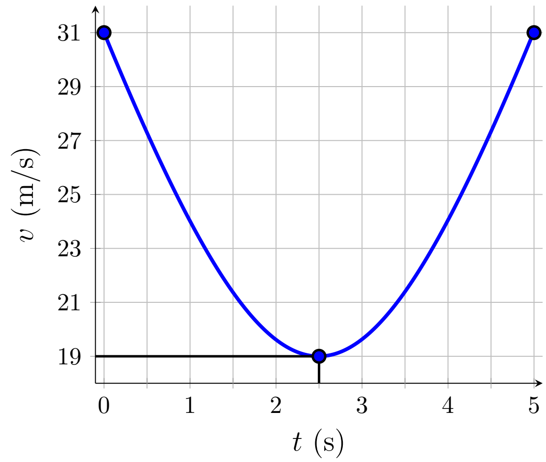
4. Feladat:

A teljesen sík golfpályán elütünk egy golflabdát. A golflabda sebességének nagyságát az idő függvényében a mellékelt grafikon mutatja ($t = 0$ időpillanatban ütjük meg a labdát).

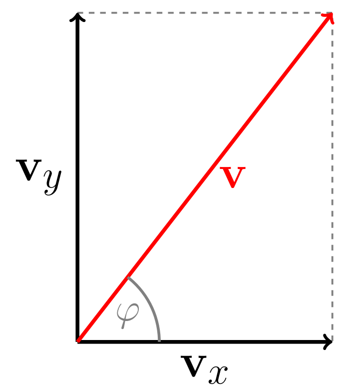
a) Az ütés helyétől mekkora távolságra ért földet a labda?

b) A grafikon alapján mennyinek adódik a g nehézségi gyorsulás értéke?

c) A földfelszíntől számítva milyen magasra emelkedett a golflabda?



Megoldás: A golflabda elütése egy *ferde hajítás*nak felel meg. Ez egy vízszintes irányú egyenesvonalú egyenletes mozgásból és egy függőleges irányú hajításból tevődik össze. **(2 pont)**
A golflabda $\mathbf{v}$ pillanatnyi sebessége fölbontható vízszintes ($\mathbf{v}_x$) és függőleges ($\mathbf{v}_y$) irányú komponensekre, ahogy azt az ábra is mutatja. **(1 pont)**
(A grafikonon $\mathbf{v}$ nagyságát ábrázolja.)



A labda sebessége pályája tetőpontján lesz minimális. Ez $t_m = 2,5\,\mathrm{s}$ -nál következik be. Ekkor csak x irányú sebessége van, hisz y irányban épp megáll.
Tehát $v_{x,0} = v(2,5\,\mathrm{s}) = 19\,\mathrm{m/s}$. **(2 pont)**

A grafikonról meghatározható az y irányú kezdősebesség is. Hisz látjuk, hogy a kezdősebesség nagysága $v_0 = 31\,\mathrm{m/s}$ továbbá már tudjuk, hogy $v_{x,0} = 19\,\mathrm{m/s}$.
Innen Pitagorasz tétellel: $v_{y,0} = \sqrt{v_0^2 - v_{x,0}^2} = \sqrt{31^2 - 19^2} = \sqrt{600}\,\mathrm{m/s} = 24,49\,\mathrm{m/s}$ **(3 pont)**

Ad a) A grafikonról leolvasható, hogy a labda $T = 5\,\mathrm{s}$ múlva ér földet. **(1 pont)**
Igy a hajítás távolsága: $d = v_{x,0} \cdot T = 19 \cdot 5 = \underline{\underline{95\,\mathrm{m}}}$ **(1 pont)**

Ad b) Felhasználva ismét, hogy a pálya tetőpontján az y irányú sebesség nulla kapjuk, hogy

$$v_{y,0} = g \cdot t_m \qquad \Rightarrow \qquad g = \frac{v_{y,0}}{t_m} = \frac{\sqrt{600}}{2,5} = \underline{\underline{4\sqrt{6}\,\mathrm{m/s^2}}} = \underline{\underline{9,80\,\mathrm{m/s^2}}}$$ **(5 pont)**

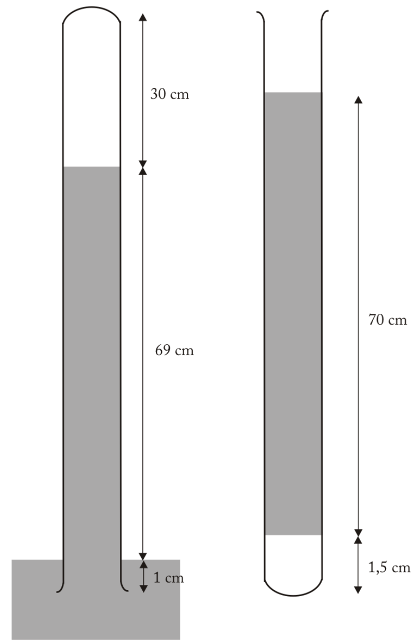
Ad c) A hajítás magassága: $h = \frac{g}{2}t_m^2 = \frac{4\sqrt{6}}{2}2,5^2 = \frac{25 \cdot \sqrt{6}}{2}\,\mathrm{m} = \underline{\underline{30,62\,\mathrm{m}}}$ **(5 pont)**
Ugyan ezt kapjuk az energiamegmaradásból is: $mgh = \frac{1}{2}mv_{y,0}^2$,
ahonnan a magasság $h = \frac{v_{y,0}^2}{2g} = \frac{600}{2 \cdot 4\sqrt{6}} = \frac{25 \cdot \sqrt{6}}{2}\,\mathrm{m} = \underline{\underline{30,62\,\mathrm{m}}}$

Megjegyzés: A φ szög kiszámolása nem szükséges a feladat megoldásához, de természetesen szögfüggvényekkel is lehet számolni. $\cos\varphi = \frac{v_{x,0}}{v_0} = \frac{19}{31} \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = 52,2^\circ$
Az ábrán szereplő függvény nem parabola!
Hisz a sebesség nagysága az idő függvényében: $v(t) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_{x,0}^2 + (v_{y,0} - g \cdot t)^2}$

5. Feladat:

A Torricelli-kísérlet végzése közben az $1\,\mathrm{m}$-es üvegcsőbe a higanyoszlop fölé levegő jutott be, így a külső légnyomásra $690\,\mathrm{Hgmm}$ adódott, a higany fölé jutott levegőoszlop hossza ekkor $30\,\mathrm{cm}$. A cső alját befogva, a csövet megfordítva és a befogást megszüntetve a higanyoszlop a beszorult levegőoszlopot $1,5\,\mathrm{cm}$-re nyomja össze. Mekkora a tényleges külső légnyomás?
(Megjegyzés: a Hg mérgező anyag ezért a kísérletet csak gondolatban végezzük el.)

Megoldás: $l_1 = 30\,\mathrm{cm}$ $l_2 = 1,5\,\mathrm{cm}$.



A hibás méréskor a cső függőleges, a felső, zárt végében van bezárva az $l_1 = 30\,\mathrm{cm}$ hosszúságú, p_1 nyomású levegő (a Hg gőz parciális nyomása olyan kicsiny, hogy attól eltekinthetünk). A cső alsó vége $1\,\mathrm{cm}$-rel merül a külső higanyszint alá, így a csőben, a levegő alatt $700\,\mathrm{mm}$-es higanyoszlop található. A tényleges p_0 külső légnyomásra: $p_0 = p_1 + 690\,\mathrm{Hgmm}$ (célszerű a nyomást Hgmm-ben mérni!) **(1 pont)**

A cső aljának befogásakor ezek az adatok megmaradnak. **(Egy helyes ábrára 2 pont adható.)**

Amikor megfordítjuk a csövet, a légoszlop összenyomódik, majd a befogást megszüntetve a $700\,\mathrm{mm}$-es higanyoszlopot felülről a keresett p_0 nyomású külső levegő nyomja lefelé, így a cső aljába beszorult levegő p_2 nyomására $p_2 = p_0 + 700\,\mathrm{Hgmm}$ adódik.
(Egy helyes ábrára 2 pont adható, az egyenletre +1 pont)

Ha 690 mm-es higanyoszloppal számol. **(-2 pont az összpontból)**

A hőmérséklet megváltozására nem utal semmi, ezért azt állandónak tekintjük. **(1 pont)**

A Boyle-Mariotte törvény szerint: $p_1 \cdot A \cdot l_1 = p_2 \cdot A \cdot l_2$, vagyis $p_2 = p_1 \cdot l_1 / l_2 = 20 \cdot p_1$ **(3 pont)**

A fenti három egyenletből: $p_2 = 20 \cdot p_1 = 20 \cdot (p_0 - 690\,\mathrm{Hgmm}) = p_0 + 700\,\mathrm{Hgmm}$, amiből $19 \cdot p_0 = 700\,\mathrm{Hgmm} + 20 \cdot 690\,\mathrm{Hgmm}$, $p_0 = \underline{\underline{763,16\,\mathrm{Hgmm}}}$. **(további 10 pont, összesen 20 pont)**

($p_2 = p_0 + 690\,\mathrm{Hgmm}$-rel számolva $p_0 = 762,63\,\mathrm{Hgmm}$, **(Erre az eredményre max 18 pont)**)

6. Feladat:

Lehetséges-e, hogy egy alumínium és egy réz pálca hosszának különbsége hőmérséklettől függetlenül állandó egy viszonylag széles hőmérséklet tartományban? Mi ennek a feltétele? Mekkora a két pálca hossza $20\,°\mathrm{C}$-on, ha a különbség $4\,\mathrm{cm}$?
(A lineáris hőtágulási tényezők $20\,°\mathrm{C}$-on: $\alpha_{\mathrm{Al}} = 2,39 \cdot 10^{-5}\,1/°\mathrm{C}$, $\alpha_{\mathrm{Cu}} = 1,62 \cdot 10^{-5}\,1/°\mathrm{C}$)

Megoldás:

A lineáris hőtágulási törvény szerint az alumínium pálca hossza t hőmérsékleten:
$l'_{\mathrm{Al}} = l_{\mathrm{Al}} \cdot [1 + \alpha_{\mathrm{Al}} \cdot (t - 20)]$, ahol l_{Al} a hossz $t = 20\,°\mathrm{C}$ fokon. **(1 pont)**
Ugyanígy a réz pálcára:
$l'_{\mathrm{Cu}} = l_{\mathrm{Cu}} \cdot [1 + \alpha_{\mathrm{Cu}} \cdot (t - 20)]$, ahol l_{Cu} a hossz $t = 20\,°\mathrm{C}$ fokon. **(1 pont)**
Ebből
$l_{\mathrm{Cu}} \cdot \alpha_{\mathrm{Cu}} \cdot (t - 20) = l_{\mathrm{Al}} \cdot \alpha_{\mathrm{Al}} \cdot (t - 20)$,
vagyis

$$\boxed{\frac{l_{\mathrm{Al}}}{l_{\mathrm{Cu}}} = \frac{\alpha_{\mathrm{Cu}}}{\alpha_{\mathrm{Al}}} = 0,678} \qquad \textbf{(6 pont)}$$

Innen azt is látjuk, hogy a réz a hosszabb, így:

$$l'_{\mathrm{Cu}} - l'_{\mathrm{Al}} = l_{\mathrm{Cu}} - l_{\mathrm{Al}} = 4\,\mathrm{cm} \qquad \textbf{(3 pont)}$$

Ugyanakkor $l_{\mathrm{Cu}} - l_{\mathrm{Al}} = l_{\mathrm{Cu}} - 0,678 \cdot l_{\mathrm{Cu}} = 0,322 \cdot l_{\mathrm{Cu}} = 4\,\mathrm{cm}$, **(4 pont)**

Amiből $l_{\mathrm{Cu}} = \underline{\underline{12,42\,\mathrm{cm}}}$, $\quad l_{\mathrm{Al}} = \underline{\underline{8,42\,\mathrm{cm}}}$. **(3 pont)**

Abban a hőmérsékleti tartományban, amelyben a lineáris hőtágulási törvény érvényes, a pálcák hosszkülönbsége $4\,\mathrm{cm}$ marad.
(2 pont)

7. Feladat:

Belsőégésű motor dugattyújának keresztmetszete A. Sűrítéskor a hengerben levő keveréket a dugattyú a p_0 külső légnyomás 10-szeresére ($p = 10 \cdot p_0$) nyomja össze. Ekkor a keverék gáz hőmérséklete $250\,°\mathrm{C}$ fok, amely a robbanás következtében $2500\,°\mathrm{C}$ fokra ugrik fel. Mekkora erő löki meg a dugattyút robbanáskor?
($A = 100\,\mathrm{cm}^2$, $p_0 = 100\,\mathrm{kPa}$)

Megoldás: $T_1 = 250\,°\mathrm{C} = 523\,\mathrm{K}$, $T_2 = 2500\,°\mathrm{C} = 2773\,\mathrm{K}$, $p_0 = 10^5\,\mathrm{Pa}$.

A robbanás előtti állapot: $p_1 = 10 \cdot p_0 = 10^6\,\mathrm{Pa}$, $T_1 = 523\,\mathrm{K}$, V_1
A robbanás utáni pillanatban: p_2, $T_2 = 2773\,\mathrm{K}$, $V_2 = V_1$
A térfogat a robbanás rövid időtartama alatt nem tud megváltozni: $p_1/T_1 = p_2/T_2$, **(10 pont)**
Amiből $p_2 = p_1 \cdot T_2/T_1$.

Az A felületű dugattyúra a robbanás következtében $p_2 \cdot A$ erő hat.
$F = p_2 \cdot A = T_2/T_1 \cdot p_1 \cdot A = 2773/523 \cdot 10^6 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{N} = \underline{\underline{5,3021 \cdot 10^4\,\mathrm{N} = 53\,\mathrm{kN}}}$. **(10 pont)**

8. Feladat:

Egy-egy 1200 W-os elektromos fűnyírót szeretnénk üzemeltetni 20 méteres kábellel Amerikában, illetve Európában. A fűnyírók akkor működnek, ha legalább a névleges teljesítmény 95%-a jut rájuk. Hogyan aránylik egymáshoz a működtetéshez szükséges rézkábelek súlya a két földrészen, ahol a hálózati feszültségek értéke 110 V, illetve 230 V?

Megoldás: $P = 1200\,\mathrm{W}$, $l = 20\,\mathrm{m}$, $\eta = 95\%$, $U_1 = 110\,\mathrm{V}$, $U_2 = 230\,\mathrm{V}$.
A fűnyíró és a hosszabbító kábel soros kapcsolásban van. A megadott teljesítményből így 95 % jusson a fűnyíróra, 5 % a kábelre: **(3 pont)**
$0,95P = I^2 R$,
$0,05P = I^2 R_k$,
amiből $\dfrac{R}{R_k} = \dfrac{95}{5} = 19$, így az eredő ellenállás $R + R_k = 20R_k$. **(2 pont)**

Mivel $P = \dfrac{U^2}{R + R_k}$, így $R_k = \dfrac{U^2}{20P}$ adott a kétféle feszültség esetében. **(5 pont)**

Másrészt $R_k = \rho\dfrac{l}{A}$, amiből $A = \rho\, l\, \dfrac{20P}{U^2}$. **(5 pont)**

A kábelek tömegeinek aránya azonos a keresztmetszetek arányával, mivel a többi mennyiség azonos:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{A_1}{A_2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{m_1}{m_2} = \frac{U_2^2}{U_1^2} = \frac{230^2}{110^2} = 4,37}.$$

(5 pont)

9. Feladat:

Zárt tartályban lévő $300\,\mathrm{K}$ hőmérsékletű, $10^5\,\mathrm{Pa}$ nyomású kétatomos gázt $2000\,\mathrm{K}$-re melegítünk, ennek következtében molekuláinak 20 %-a disszociál, azaz atomokra esik szét.

a) Mekkora a gáz nyomása a végállapotban?

b) Hányadrésze az atomos gáz energiája az összes energiának?

c) Mekkora a disszociációhoz szükséges energia, ha a molekulák kezdeti száma $5 \cdot 10^{24}$ db?

Megoldás: $T_1 = 300K$, $p_1 = 10^5 Pa$, $T_2 = 2000K$, $x = 0,2$, $V =$ állandó, $N_1 = 5 \cdot 10^{24}$

A gázrészecskék száma a végső állapotban

$$N_2 = (1 - x)N_1 + 2xN_1 = (1 + x)N_1 = 1,2N_1. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Ad a) Az állapotegyenlet a kezdő illetve a végállapotban: $p_1V = N_1kT_1$ illetve $p_2V = N_2kT_2$
A két egyenletet egymással elosztva

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{N_2T_2}{N_1T_1} = 1,2\frac{T_2}{T_1},$$

ahonnan

$$p_2 = 1,2\, p_1\frac{T_2}{T_1} = 1,2 \cdot 10^5 \frac{2000}{300} = \underline{\underline{8 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}}} \qquad \textbf{(6 pont)}$$

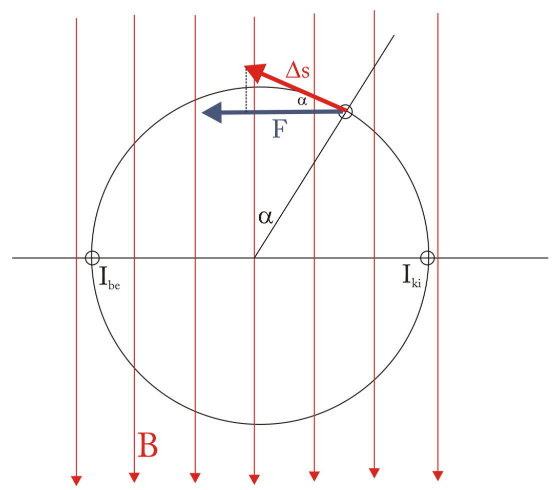
Ad b) A végállapotban az atomok energiája $E_a = \frac{3}{2}(2 \cdot 0,2N_1)kT_2 = \frac{1,2}{2}N_1kT_2$, a megmaradt molekulák energiája $E_m = \frac{5}{2}(0,8N_1)kT_2$, így a gáz összes energiája $E_ö = E_a + E_m = \frac{5,2}{2}N_1kT_2$.
Ebből a kérdezett arány $\frac{E_a}{E_ö} = \frac{1,2}{5,2} = \underline{\underline{23\%}}$. **(6 pont)**

Ad c) Ha nem esne szét a molekulák egy része atomokra, akkor a végállapot energiája $\frac{5}{2}N_1kT_2$ lenne, a kezdeti energia $E_0 = \frac{5}{2}N_1kT_1$.
Ha disszociáció is van, akkor a végállapot energiája $\frac{5,2}{2}N_1kT_2$, így a végállapoti energiák különbsége a disszociációhoz szükséges energia: $E_d = \frac{0,2}{2}N_1kT_2$.
Az adatokat beírva $E_d = 0,1 \cdot 5 \cdot 10^{24} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 2000\,\mathrm{J} = \underline{\underline{13,8\,\mathrm{kJ}}}$. **(6 pont)**

10. Feladat:

Egy elektromotor forgórészének átmérője $d = 13\,\mathrm{cm}$, hossza $l = 24\,\mathrm{cm}$, menetszáma $N = 200$. Az állórész mágnesei a forgó menetekre merőleges $B = 1,2\,\mathrm{Vs/m^2}$ nagyságú homogén mágneses indukciójú mezőt hoznak létre. Mekkora áramot kell a motorba vezetni, hogy percenkénti 1500-as fordulatszámon a motor teljesítménye (a veszteségekkel együtt) $5\,\mathrm{kW}$ legyen?

Megoldás: Tekintsünk egyetlen menetet, annak is a B-re merőleges egyik l hosszúságú darabját (α szögnél a jobboldali fél menet)!
B merőleges az áramra (I_{be}), az erő $F = IBl$ (balra). **(2 pont)**
Egy kis (érintő irányú) elmozdulás során végzett munka:
$F\cdot$ az elmozdulásnak az erő irányába eső vetülete. **(2 pont)**
Mivel az erő iránya (és nagysága is) állandó, a teljes erő irányú elmozdulással (ez fél fordulatra $2R$) kell szorozni. **(3 pont)**
Ekkor az áram iránya (és így az erőé is) ellenkezőjére vált, és az elmozdulással továbbra is hegyesszöget zár be, a második félfordulat során is $F \cdot 2R$ a végzett munka. **(2 pont)**
Vagyis egy fél meneten a mező egy teljes fordulat során $2F \cdot 2R$ munkát végez, egy teljes meneten egy teljes fordulat ideje alatt végzett munka: $4F \cdot d$. **(2 pont)**
Az N meneten $T = 1/f$ idő alatt végzett munka:



1. ábra. **(Ábrára 3 pont)**

$$W = N \cdot 4\,F \cdot d = N \cdot 4 \cdot IBl \cdot d = 4N \cdot Bld \cdot I = P \cdot T = \frac{P}{f}, \qquad \textbf{(3 pont)}$$

amiből

$$I = \frac{P}{4NBldf} = \frac{5000}{800 \cdot 1,2 \cdot 0,24 \cdot 0,13 \cdot 1500/60} = \underline{\underline{6,68\,\mathrm{A}}} \qquad \textbf{(3 pont)}$$

Másik megoldás A forgatónyomaték segítségével is erre jutunk.
A ható erőpárban az erő: $F = IBl$, amelynek a karja $R\sin\omega t$.

Így a forgatónyomaték: $M = 2F \cdot R\sin\omega t = 2 \cdot IBl \cdot R\sin\omega t = IBdl\sin\omega t$

Innen a pillanatnyi teljesítmény az N meneten: $P = NM\omega = NIBdl\omega\sin\omega t$

Ennek az átlagát érzékeljük:

$$\overline{P} = NBld \cdot I \cdot \omega\overline{\sin\omega t} = NBdl \cdot I \cdot 2\pi f \cdot \frac{2}{\pi} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{P}{4NBldf}$$

Ahol kihasználtuk, hogy a sin félperiódusra való átlaga: $\overline{\sin\omega t} = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} \sin\frac{2\pi t}{T} = \frac{2}{T} \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot 2 = \frac{2}{\pi}$

11. Feladat:

Az atomórákban cézium (^{133}Cs) atomokat használnak az idő mérésére. A legkorszerűbb változatukban egy körülbelül 10^{-6} K hőmérsékletre hűtött Cs atomfelhőt vákuumban egy lézerimpulzussal fölfelé löknek $1\,\mathrm{m}$ magasságra. A függőleges hajítás során az atomok egyszer fölfelé, utána lefelé áthaladnak egy alul és fölül nyitott üregen, amelyben körülbelül $9,2\,\mathrm{GHz}$ frekvenciájú mikrohullámú elektromágneses mezőt keltenek. Az atomok belső állapota akkor változik meg, azaz akkor kerülnek gerjesztett állapotba, ha a frekvencia pontosan illeszkedik két adott belső energiaállapot különbségéhez. Ez szolgáltatja a másodperc mérhető definícióját.

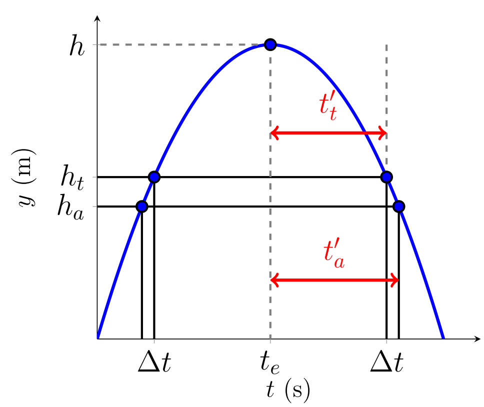
a) Az üreg $10\,\mathrm{cm}$ magas és a középpontja $0,5\,\mathrm{m}$ magasságban van az induló atomfelhő fölött. Mennyi idő alatt haladnak át az üregen az atomok fölfelé, illetve lefelé mozogva?

b) Mekkora az atomok átlagos sebessége a lézerimpulzus előtt, mit mondhatunk ennek a sebességnek az irányáról?

c) A régebbi atomórákban a szobahőmérsékletű: $293\,\mathrm{K}$-es Cs gőzből választották ki azt az atomnyalábot, amely vízszintesen haladt át egy ugyanilyen üregen. Hányszor hosszabb ideig tart a kölcsönhatás a mikrohullámmal a korszerűbb változatban, mint a régiben?

d) Mekkora körülbelül az üreg keresztirányú mérete, ha benne egy félhullám hosszúságú rezgési mód is megvalósulhat? Mekkora az atom gerjesztési energiája a kiinduló alapállapothoz képest?

Ad a) Függőleges hajítás történik. A sebesség illetve az elmozdulás mint az idő függvénye: $v_y = -gt + v_0$, $y(t) = -gt^2/2 + v_0 t$.



A csúcspontot akkor éri el 0 sebességgel az atomfelhő, amikor $v_y = 0$, azaz az emelkedési idő $t_e = v_0/g$, ezt a második egyenletbe írva az $y(t_e) = h$ emelkedési magasságból $v_0 = \sqrt{2gh} = 4,43\,\mathrm{m/s}$
(Ugyanezt kaphatjuk az energiamegmaradásból is.)

Az idő számítása úgy a legegyszerűbb, ha figyelembe vesszük, hogy a csúcspont elérésének időpillanatára nézve a mozgás időben (vagyis az $y(t) = -gt^2/2 + v_0 t$ parabola a csúcspontján átmenő függőleges tengelyre nézve) szimmetrikus.
A csúcspont elérését követően az atomok szabadesést végeznek. Így elegendő a szabadesést végző atomok esetén kiszámítani, hogy mennyi idő alatt teszik meg az üreg tetejéig $s_t = h - h_t = 0,45\,\mathrm{m}$ és az aljáig az $s_a = h - h_a = 0,55\,\mathrm{m}$ távolságot.
A két idő $t'_t = \sqrt{2g/s_t} = 0,3029\,\mathrm{s}$
illetve $t'_a = \sqrt{2g/s_a} = 0,3349\,\mathrm{s}$
A kettő különbsége a leesés közben az üregben töltött idő $\Delta t = \underline{\underline{0,032\,\mathrm{s}}}$.
A jelzett szimmetria miatt az üregben töltött idő fölfelé is ugyanennyi, (azaz az üregben eltöltött idő összesen $2\Delta t = \underline{\underline{0,064\,\mathrm{s}}}$) **(5 pont)**

Ad b) Az atomok sebességének átlagos nagysága a $\frac{3}{2}kT = \frac{1}{2}mv^2$ szerint a modern változatban $T_m = 10^{-6}K$-nél $v_1 = \sqrt{3kT_m/m} = \underline{\underline{1,37 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m/s}}}$, és <u>minden irányban</u> egyformán valószínű. **(4+1 pont)**

Ahol az m_{Cs} atomi tömeget vagy a moltömeg az $M = 0,133\,\mathrm{kg/mol}$ és az $N_A = 6 \cdot 10^{23}\,\mathrm{atom/mol}$ (Avogadro szám) hányadosából, vagy a táblázatból kiolvasható 1atomi tömegegység $= 1\,\mathrm{Dalton} = 1,66 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$ és a 133 szorzatából kaphatjuk meg. $m_{\mathrm{Cs}} = 2,21 \cdot 10^{-25}\,\mathrm{kg}$

Ad c) Ez esetben az átlagsebesség a régi $T_r = 293\,\mathrm{K}$ értékével számolva $v_2 = v_1\sqrt{T_r/T_m} = 234,5\,\mathrm{m/s}$. Ezzel az *egyenletes* sebességgel az $l = 0,1\,\mathrm{m}$ hosszúságú üregen $t_0 = l/v_2 = 4,26 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{s}$ alatt haladnak át az atomok, ilyenkor csak egyszer. Az *a)* pontban kiszámított idő és a t_0 hányadosa $2\Delta t/t_0 = \underline{\underline{150}}$. Ennyiszer hosszabb ideig tart a kölcsönhatás a lézeres föllövés esetén. **(5 pont)**

Ad d) A $\nu = 9,2\,\mathrm{GHz}$ frekvenciájú elektromágneses hullám félhullámhossza a $c = 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$ fénysebességgel számolva $\lambda/2 = c/(2\nu) = 1,6\,\mathrm{cm}$.
A két nívó közötti energiakülönbség a Bohr féle képletből (a $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ Js Planck állandóval)
$E_2 - E_1 = h\nu = \underline{\underline{6,1 \cdot 10^{-24}\,\mathrm{J}}}$. **(5 pont)**

12. Feladat:

Az uránt az emberiség elsősorban nukleáris reaktorok üzemanyagaként használja fel. Két leggyakoribb izotópja a 238-as és a 235-ös tömegszámú, melyeknek (az uránatomok száma szerint vett) előfordulási gyakorisága a természetben 99,28% és 0,72%. A két izotóp felezési ideje rendre $4,51 \cdot 10^9$ év és $7,1 \cdot 10^8$ év. A földkéregben a többi (nem nemes) fémhez hasonlóan ércei formájában fordul elő, egyik leggyakoribb bányászati kitermelési formája az uránszurokérc (U_3O_8).
Radioaktív anyag aktivitásának az időegységre eső bomlások számát nevezzük. Egysége a bomlás/másodperc, 1 becquerel (Bq). Egy leselejtezett, roncstelepre szánt bányagép karosszériájára tapadva a gondos tisztítás ellenére rajta maradt 120 milligramm uránszurokérc.

a) Mennyi az aktivitása ennek a szemcsének?

b) Hányadrésze a ^{235}U aktivitása a szemcse aktivitásának?

Megoldás: (T a felezési időt, f az izotópok előfordulási gyakoriságát jelöli.)
$T_{238} = 4,51 \cdot 10^9$ év $= 1,42 \cdot 10^{17}$ s, $T_{235} = 7,10 \cdot 10^8$ év $= 2,24 \cdot 10^{16}$ s, $f_{238} = 99,28\%$, $f_{235} = 0,72\%$,
$m = 120\,\mathrm{mg} = 0,12\,\mathrm{g}$ **(átváltások 1+1 pont)**
Az aktivitást az $A = \lambda N$ összefüggéssel számoljuk (λ a bomlási állandó). **(2 pont)**

Az uránmagok száma:
Az oxigén tömegszáma: 16
Az uránszurokérc moláris tömege: $M_{\text{érc}} = 3M_U + 8M_O = 3(f_{238} \cdot 238 + f_{235} \cdot 235) + 8 \cdot M_O = 3 \cdot (0,9928 \cdot 238 + 0,0072 \cdot 235) + 8 \cdot 16 = 841,94\,\mathrm{g/mol}$ **(3 pont)**
Az uránszurokérc-darabka anyagmennyisége: $n_{\text{érc}} = m/M_{\text{érc}} = 0,12\,\mathrm{g}\,/(841,94\,\mathrm{g/mol}) = 1,425 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{mol}$
Az uránatomok száma: $N_U = 3n_{\text{érc}} \cdot N_A = 3 \cdot 1,425 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{mol} \cdot 6,02 \cdot 10^{23}\,\mathrm{db/mol} = 2,574 \cdot 10^{20}\,\mathrm{db}$ **(1 pont)**
Ebből 238-as uránatomok száma: $N_{238} = f_{238} \cdot N_U = 0,9927 \cdot 2,574 \cdot 10^{20} = 2,555 \cdot 10^{20}$ **(1 pont)**
(a versenyző észreveheti, hogy elhanyagolható – a végeredményben 0,7% – pontatlanságot okoz, ha N_{238}-at egyszerűen N_U-val közelíti)
Ebből 235-ös uránatomok száma: $N_235 = f_{235} \cdot N_U = 0,0072 \cdot 2,574 \cdot 10^{20} = 1,853 \cdot 10^{18}$ **(1 pont)**

A bomlási állandók:
$\lambda_{238} = \ln(2)/T_{238} = 0,693/\,(1,42 \cdot 10^{17}\,\mathrm{s}) = 4,88 \cdot 10^{-18}\,1/\mathrm{s}$
$\lambda_{235} = \ln(2)/T_{235} = 0,693/\,(2,24 \cdot 10^{16}\,\mathrm{s}) = 3,09 \cdot 10^{-17}\,1/\mathrm{s}$ **(2 pont)**

Ad a) A két uránizotóp bomlása egymást nem befolyásolja. Mivel az aktivitás a mintában végbemenő bomlások időegység alatti száma, egyszerűen összeadódik a két izotóp aktivitásából.
$A_U = A_{238} + A_{235} = \lambda_{238} \cdot N_{238} + \lambda_{235} \cdot N_{235} = 4,88 \cdot 10^{-18}\,1/\mathrm{s} \cdot 2,555 \cdot 10^{20} + 3,09 \cdot 10^{-17}\,1/\mathrm{s} \cdot 1,853 \cdot 10^{18} = 1246,8\,\mathrm{Bq} + 57,3\,\mathrm{Bq} = \underline{\underline{1304\,\mathrm{Bq}}}$. **(4 pont)**

(Összesen: 16 pont)

Ad b)

$$\frac{A_{235}}{A_U} = \frac{57,3}{1304} = 0,044 = \underline{\underline{4,4\%}}$$

Bár a 235-ös izotóp aránya a természetes uránvegyületben csaknem elhanyagolható (0,7%), aktivitása viszont rövidebb felezési ideje miatt a minta aktivitásának már nem elhanyagolható részét (4,4%) teszi ki. **(4 pont)**

13. Feladat

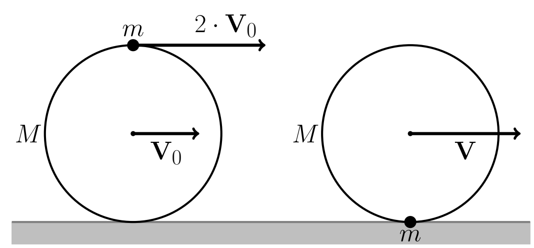
Függőleges síkú, R sugarú, M tömegű karika kerületéhez m tömegű, pontszerűnek tekinthető test van erősítve. A megfigyelés kezdetekor a karika vízszintes síkon egyenes mentén tisztán gördül V_0 sebességgel, a kis test ekkor legfelül van (a talajtól $2R$ távolságra).

a) Mekkora a karika (középpontjának) sebessége abban a pillanatban, amikor az m tömegű test éppen a talajra érkezik?

b) Mekkora az m tömegű test sebessége, amikor a talajtól R távolságra van?

($R = 0,5\,\mathrm{m}$, $M = 2\,\mathrm{kg}$, $m = 1\,\mathrm{kg}$, $V_0 = 1\,\mathrm{m/s}$, a gördülési ellenállástól tekintsünk el, és tegyük fel, hogy a tapadási súrlódás elegendően nagy ahhoz, hogy a karika tisztán gördüljön.)

Megoldás: **(egy jó ábra 3 pontot ér)**
Az energia megmarad. **(1 pont)**
Kezdeti energia: E_0 = a karika haladási energiája + a karika forgási energiája + m mozgási energiája + m magassági energiája **(2 pont)**
A tiszta gördülés feltétele, hogy a talajjal érintkező pont sebessége nulla: a haladási sebesség = a forgás kerületi sebessége: $V = R \cdot \omega$, vagyis $V_0 = R \cdot \omega_0$ **(2 pont)**



A karika legfelső pontjának sebessége = a haladási és a kerületi sebesség összege: $v_0 = 2 \cdot V_0$ **(2 pont)**
A forgási energia $= \frac{1}{2}\theta \cdot \omega^2 = \frac{1}{2}MR^2 \cdot \omega^2 = \frac{1}{2}MV^2$ = a haladási energia. **(2 pont)**

A magassági energia $= mgh$

$$E_0 = MV_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 + mg \cdot 2R = MV_0^2\left(1 + 2\frac{m}{M}\right) + mg \cdot 2R$$

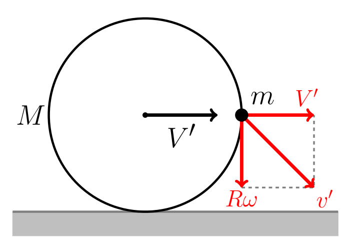
$$E = MV^2 + \frac{1}{2}mv^2 + mgh$$

Amikor m a talaj szintjére érkezik, m sebessége $v = 0$, **(1 pont)**
magassága $h = 0$, és így a teljes energia $E = MV^2$. $E = E_0$-ból:

$$V^2 = \left(1 + 2\frac{m}{M}\right)V_0^2 + \frac{m}{M}g2R = (1+1) \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot g \cdot 2 \cdot 0,5$$

Ad a) $g = 10\,\mathrm{m/s}$-mal számolva. $V = \sqrt{7}\,\mathrm{m/s} = \underline{\underline{2,65\,\mathrm{m/s}}}$ **(2 pont)**
(Eddig összesen csak 15 pont)

Ad b) Amikor m magassága $h = R$, akkor m sebességének vízszintes irányú összetevője = a karika középpontjának sebességével, vagyis a haladási sebességgel, függőleges összetevője pedig $= R \cdot \omega =$ szintén a haladási sebesség $= V'$, így m sebessége $v' = \sqrt{(V')^2 + (V')^2} = V' \cdot \sqrt{2}$ **(3 pont)**.
Az energia megmaradásából:



$E' = M(V')^2 + \frac{1}{2}m(V')^2 \cdot 2 + mgR = E = MV^2 = 14,$
$14 = 3(V')^2 + 0,5g$, amiből $g = 10\,\mathrm{m/s}$-mal számolva, $V' = \sqrt{3}$.
Így $v' = \sqrt{6}\,\mathrm{m/s} = \underline{\underline{2,45\,\mathrm{m/s}}}$ **(2 pont)**