Budó Ágoston Fizikai Feladatmegoldó Verseny Megoldások 2013

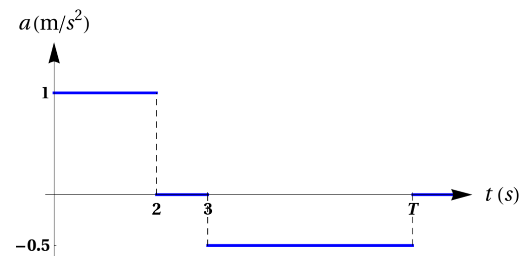
A megoldások „tájékoztató jellegűek”, egy-egy lehetséges megoldási utat mutatnak be. Minden más helyes megoldás is 20 pontot ér.

(A megoldások során a számolásokban csak ott írjuk ki a mértékegységet ahol nem SI egységeket használunk.)

1. Feladat:

Mekkora utat tesz meg az a test, amelynek gyorsulás idő grafikonját indulástól ($t = 0$) megállásig ($t = T$) a mellékelt ábra mutatja?

Mikor áll meg a test ($T = ?$)?



Megoldás:

I. szakasz: $t \in [0, 2\,\mathrm{s}]$

A gyorsulás idő grafikonról leolvashatjuk, hogy ekkor a gyorsulás értéke: $a_1 = 1\,\mathrm{m/s^2}$.

A test a $t = 0$ időpillanatban indult, így kezdeti sebessége nulla. Ezért a szakasz végén a sebessége:

$$v_1 = a_1 \cdot \Delta t = 1 \cdot 2 = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.$$

A szakasz során megtett út pedig:

$$s_1 = \frac{a_1}{2} \cdot \Delta t^2 = \frac{1}{2} \cdot 2^2 = 2\,\mathrm{m}\,. \qquad \text{(6 p)}$$

II. szakasz: $t \in [2\,\mathrm{s}, 3\,\mathrm{s}]$

A gyorsulás idő grafikonról leolvashatjuk, hogy a gyorsulás értéke nulla, azaz a sebesség állandó ezen a szakaszon:

$$v_2 = v_1 = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.$$

Így az ezen a szakaszon megtett út nagysága:

$$s_2 = v_2 \cdot \Delta t = 2 \cdot 1 = 2\,\mathrm{m}\,. \qquad \text{(6 p)}$$

III. szakasz: $t \in [3\,\mathrm{s}, T]$

A gyorsulás idő grafikon alapján ezen a szakaszon a gyorsulás értéke: $a_3 = -0.5\,\mathrm{m/s^2}$.

Így ezen a szakaszon a sebesség:

$$v_3 = v_2 + a_3 \cdot \Delta t = 2 - 0.5 \cdot \Delta t.$$

Meg kell határoznunk hogy mennyi idő alatt áll meg a test. Ez a fönti formulába behelyettesítve az alábbi egyenletből számolható:

$$0 = 2 - 0.5 \cdot \Delta t_0.$$

Ahonnan a megálláshoz szükséges időt kifejezve:

$$\Delta t_0 = \frac{2}{0.5} = 4\,\mathrm{s}\,. \qquad \color{red}{(2\ \mathrm{p})}$$

Az indulástól a megállásig eltelt idő – azaz T értéke – innen már könnyen adódik:

$$T = 2\,\mathrm{s} + 1\,\mathrm{s} + 4\,\mathrm{s} = \underline{\underline{7\,\mathrm{s}}}. \qquad \color{red}{(2\ \mathrm{p})}$$

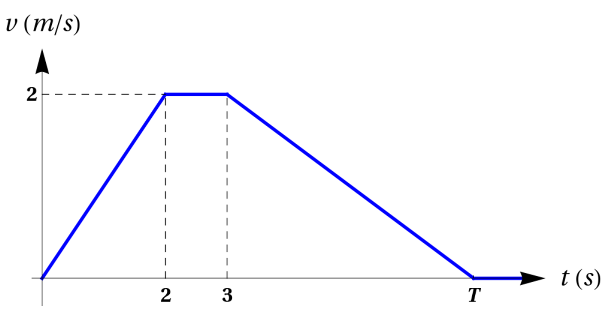
A szakasz során megtett út:

$$s_3 = v_2 \cdot \Delta t + a_3 \cdot \Delta t^2 = 2 \cdot 4 - \frac{0.5}{2} \cdot 4^2 = 8 - 4 = 4\,\mathrm{m} \qquad \color{red}{(3\ \mathrm{p})}$$

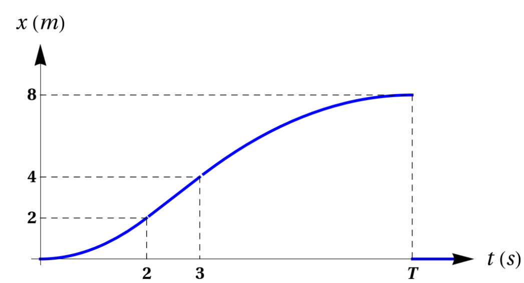
Az egyes szakaszokra kiszámoltuk a megtett utat. A teljes mozgási folyamat során a test által megtett út így:

$$s = s_1 + s_2 + s_3 = 2 + 2 + 4 = \underline{\underline{8\,\mathrm{m}}}. \qquad \color{red}{(1\ \mathrm{p})}$$

Megrajzolhatjuk a sebesség-idő és út-idő grafikonokat is:



sebesség-idő grafikon



út-idő grafikon

A vonatkozó függvények gyorsan levezethetőek:

$$v(t) = \begin{cases} 2 \cdot t & 0 \leq t \leq 2\,\mathrm{s} \\ 2 & 2\,\mathrm{s} \leq t \leq 3\,\mathrm{s} \\ 2 - 0,5 \cdot (t-3) = 3,5 - 0,5 \cdot t & 3\,\mathrm{s} \leq t \leq 7\,\mathrm{s} \end{cases}$$

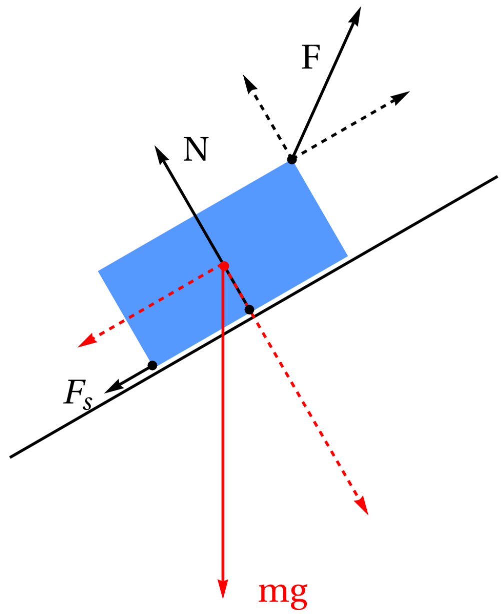
$$s(t) = \begin{cases} 2 \cdot t^2 & 0 \leq t \leq 2\,\mathrm{s} \\ 2 + 2 \cdot (t-2) = 2 \cdot t - 2 & 2\,\mathrm{s} \leq t \leq 3\,\mathrm{s} \\ 4 + 2 \cdot (t-3) - 0,25 \cdot (t-3)^2 = -4,25 + 3,5t - 0,25t^2 & 3\,\mathrm{s} \leq t \leq 7\,\mathrm{s} \end{cases}$$

2. Feladat:

$50\,\mathrm{kg}$ tömegű ládát húzunk felfelé állandó sebességgel egy $30°$-os lejtő tetejére. A súrlódási együttható a láda és a lejtő között 0,3. Munkánk hatásfoka 80%.

a) Mekkora a húzóerő?

b) Adjuk meg a húzóerő lejtőre merőleges komponensének a húzóerővel vett arányát!



1. Megoldás (szögfüggvények direkt használata nélkül):

Adatok: $m = 50\,\mathrm{kg}$; $\alpha = 30°$; $\mu = 0,3$; $\eta = 80\%$.

Az alkalmazott **F** erő olyan nagyságú, hogy állandó sebességgel mozog a test a lejtőn. Így a testre ható erők eredője nulla:

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_s + m\mathbf{g} + \mathbf{N} = \mathbf{0} \qquad \text{(1 p)}$$

Kihasználva, hogy egy szabályos háromszöggé kiegészíthető $30°$-os derékszögű háromszögben az oldalak nagysága az 1. ábrán vázolt módon alakul, kiszámítjuk a nehézségi erő lejtőre merőleges és a lejtővel párhuzamos komponensét:

$$mg\frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad mg\frac{1}{2} \qquad \text{(1 p)}$$

Igy az erők egyensúlyát a lejtőre merőleges és a lejtővel párhuzamos vektorkomponensekre kiírva:

$$F_\parallel - mg\frac{1}{2} - \mu N = 0 \qquad \text{(1 p)}$$

$$N + F_\perp - mg\frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \qquad \text{(1 p)}$$

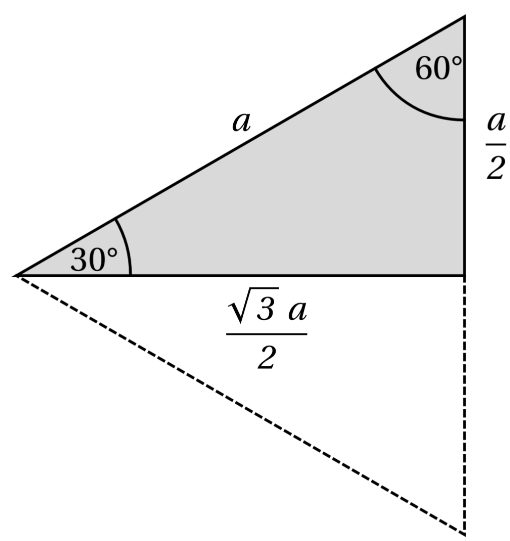
Ahol kihasználtuk, hogy a súrlódási erő nagysága :$F_s = \mu N$.

Forduljunk most a hatásfok kérdése felé.

A munka definíció szerint az erő és az erő irányába eső elmozdulás szorzata.

A példában csak a lejtővel párhuzamosan történik elmozdulás, így csak a lejtővel párhuzamos erőkomponens végez munkát. Az összmunkavégzés tehát:

$$W = F_\parallel \cdot s \qquad \text{(1 p)}$$



1. ábra. Szabályos háromszöggé kiegészíthető $30°$-os derékszögű háromszög

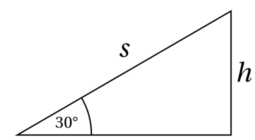
Ez a munka két dologra fordítódik, egyrészt munkát kell végezni a súrlódási erő ellenében, másrészt nő a test helyzeti energiája.

$$W = W_s + \Delta E_{pot}$$

A számunkra hasznos munkavégzés a helyzeti energia növelésére fordítódik, azaz

$$\eta = \frac{\Delta E_{pot}}{W}. \qquad (2\text{ p})$$

A helyzeti energia változást felírva és ismét kihasználva, hogy egy szabályos háromszöggé kiegészíthető 30°-os derékszögű háromszögben az oldalak nagysága az 1. ábrán vázolt módon alakul ($h = \frac{1}{2}s$).



$$\Delta E_{pot} = m \cdot g \cdot h = m \cdot g \cdot s \cdot \frac{1}{2} \qquad (1\text{ p})$$

Ezt behelyettesítve a hatásfok definíciójába:

$$\eta = \frac{m \cdot g \cdot s \cdot (1/2)}{F_{\parallel} \cdot s}$$

Ahonnan a keresett húzóerő lejtővel párhuzamos komponense:

$$F_{\parallel} = \frac{1}{\eta} \cdot m \cdot g \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{0,8} \cdot 50 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} = 312,5\,\mathrm{N} \qquad (3\text{ p})$$

A húzóerő merőleges komponensének meghatározásához visszatérünk az erők egyensúlyához.

Az első egyenletbe beírva az előbb megkapott párhuzamos erőkomponenst ki tudjuk fejezni a nyomóerő nagyságát.

$$312,5 - mg\frac{1}{2} - \mu N = 0$$

Ahonnan

$$N = \frac{1}{\mu}\left(312,5 - mg\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{0,3}\left(312,5 - 50 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2}\right) = 208,3\,\mathrm{N}\,. \qquad (3\text{ p})$$

Ezt behelyettesítve a második egyenletbe kapjuk, hogy

$$208,3 + F_{\perp} - 50 \cdot 10\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$$

Ahonnan kifejezve a húzóerő lejtőre merőleges komponensét:

$$F_{\perp} = 50 \cdot 10\frac{\sqrt{3}}{2} - 208,3 = 224,7\,\mathrm{N} \qquad (3\text{ p})$$

Innen Pitagorasz-tétele alapján a húzóerő nagysága:

$$F = \sqrt{F_{\parallel}^2 + F_{\perp}^2} = \sqrt{312,5^2 + 224,7^2} = \underline{\underline{384,9\,\mathrm{N}}} \qquad (2\text{ p})$$

A merőleges komponens és az erő aránya pedig

$$\frac{F_{\perp}}{F} = \frac{224,7}{384,9} = 0,58. \qquad (1\text{ p})$$

2. Megoldás (paraméteresen szögfüggvények használatával):

Az alkalmazott $\mathbf{F}$ erő olyan nagyságú, hogy állandó sebességgel mozog a test a lejtőn. Így a testre ható erők eredője nulla:

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_s + m\mathbf{g} + \mathbf{N} = \mathbf{0}$$

Azaz lejtőre merőleges és a lejtővel párhuzamos vektorkomponensekre kiírva:

$$F\cos\beta - mg\sin\alpha - \mu N = 0$$
$$N + F\sin\beta - mg\cos\alpha = 0$$

Ahol kihasználtuk, hogy a súrlódási erő nagysága :$F_s = \mu N$.

Forduljunk most a hatásfok kérdése felé.

A munka definíció szerint az erő és az erő irányába eső elmozdulás szorzata.

A példában csak a lejtővel párhuzamosan történik elmozdulás így csak a lejtővel párhuzamos erőkomponens végez munkát. Az összmunkavégzés tehát:

$$W = F \cdot \cos\beta \cdot s$$

Ez a munka két dologra fordítódik, egyrészt munkát kell végezni a súrlódási erő ellenében, másrészt nő a test helyzeti energiája.

$$W = W_s + \Delta E_{pot}$$

A számunkra hasznos munkavégzés tehát a helyzeti energia növelésére fordítódik, azaz

$$\eta = \frac{\Delta E}{W}.$$

A helyzeti energia változást felírva.

$$\Delta E_{pot} = m \cdot g \cdot h = m \cdot g \cdot s \cdot \sin\alpha$$

Ezt behelyettesítve a hatásfok definíciójába:

$$\eta = \frac{m \cdot g \cdot s \cdot \sin\alpha}{F \cdot \cos\beta \cdot s}$$

Ahonnan a keresett húzóerő lejtővel párhuzamos komponense:

$$F_{\|} = F \cdot \cos\beta = \frac{1}{\eta} \cdot m \cdot g \cdot \sin\alpha = \frac{1}{0,8} \cdot 50 \cdot 10 \cdot \sin 30^\circ = 312,5\,\mathrm{N}$$

A húzóerő merőleges komponensének meghatározásához visszatérünk az erők egyensúlyához.

Az első egyenletbe beírva az előbb megkapott párhuzamos erőkomponenst ki tudjuk fejezni a nyomóerő nagyságát.

$$\frac{1}{\eta} \cdot m \cdot g \cdot \sin\alpha - mg\sin\alpha - \mu N = 0$$

Ahonnan

$$N = \frac{1}{\mu}\left(\frac{1-\eta}{\eta}\right) \cdot m \cdot g \cdot \sin\alpha.$$

Ezt behelyettesítve a második egyenletbe kapjuk, hogy

$$\frac{1}{\mu}\left(\frac{1-\eta}{\eta}\right)\cdot m\cdot g\cdot \sin\alpha + F\sin\beta - mg\cos\alpha = 0.$$

Ahonnan kifejezve a húzóerő lejtőre merőleges komponensét:

$$F_{\perp} = F\sin\beta = mg\left[\cos\alpha - \frac{1}{\mu}\left(\frac{1-\eta}{\eta}\right)\sin\alpha\right] = 50\cdot 10\left[\cos 30^\circ - \frac{1}{0,3}\left(\frac{0,2}{0,8}\right)\sin 30^\circ\right] = 224,7\,\mathrm{N}$$

Innen Pitagorasz-tétele alapján a húzóerő nagysága:

$$F = \sqrt{F_{\parallel}^2 + F_{\perp}^2} = \sqrt{312,5^2 + 224,7^2} = \underline{\underline{384,9\,\mathrm{N}}}$$

A merőleges komponens és az erő aránya pedig

$$\frac{F_{\perp}}{F} = (\sin\beta) = \frac{224,7}{384,9} = 0,58.$$

(A lejtővel bezárt β szög pedig $\beta = 35,7^\circ$)

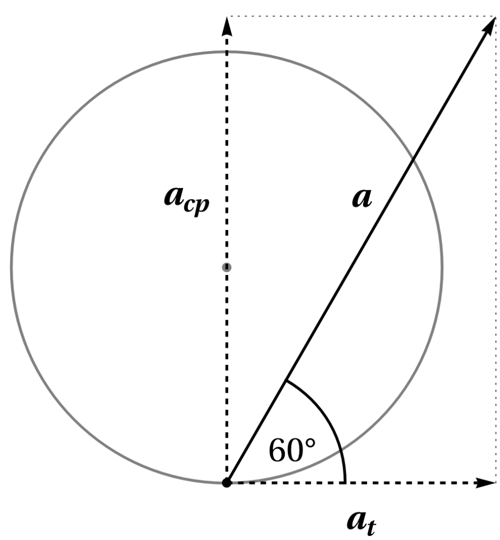
3. Feladat:

Egy egyenletesen változó körmozgást végző test eredő gyorsulása egy kiválasztott pillanatban $5\,\mathrm{m/s^2}$ és a gyorsulás iránya 60°-os szöget zár be az érintővel.

a) Álló helyzetből indulva milyen hosszú úton éri el a test a $15\,\mathrm{m/s}$ sebességet?

b) Mekkora pálya sugara, ha a $15\,\mathrm{m/s}$ sebességnél a centripetális gyorsulás $4,25\,\mathrm{m/s^2}$?

c) Mekkora a test sebessége abban a pillanatban, amikor az eredő gyorsulás $5\,\mathrm{m/s^2}$?



2. ábra. (2 p)

Megoldás:

Adatok: $a(t_1) = 5\,\mathrm{m/s^2}$; $\alpha = 60^\circ$; $v_k(t_2) = 15\,\mathrm{m/s}$ $a_{\mathrm{cp}}(t_2) = 4,25\,\mathrm{m/s^2}$.

Ad a) A t_1 időpillanatbeli adatok alapján meg tudjuk mondani a teljes gyorsulás vektor érintő irányú komponensének nagyságát. Egyenletesen gyorsuló körmozgás során ez a komponens állandó, és biztosítja az egyenletes szögsebesség növekedést. Közben a centripetális komponens nő, ahogy növekszik a szögsebesség. Tehát

$$a_t = \frac{\Delta v_k}{\Delta t} = r\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = r\beta = \mathrm{const.}$$

és egy adott időpillanatban

$$a_{\mathrm{cp}} = r\omega^2 = \frac{v_k^2}{r}.$$

Az 3. ábrán szereplő nevezetes háromszöget használva az érintő irányú gyorsulás komponens:

$$a_t = \frac{a}{2} = 2,5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \qquad \text{(2 p)}$$

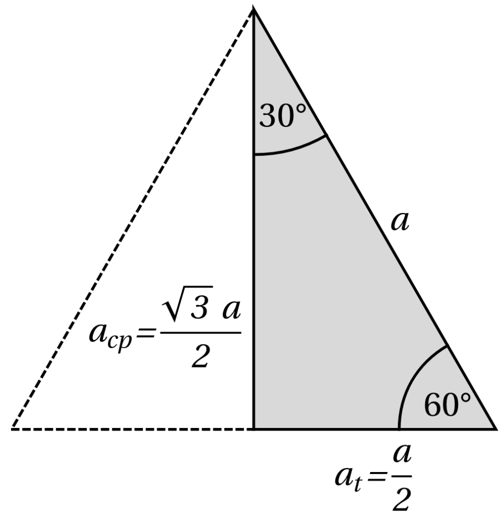
Az érintő irányú gyorsulás definíciójából ki tudjuk fejezni az indulástól eltelt időt.

$$a_t = \frac{\Delta v_k}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{\Delta v_k}{a_t} \left(= \frac{15-0}{2,5} = 6\,\mathrm{s} \right) \qquad \text{(2 p)}$$

Az eltelt idő segítségével a megtett út:

$$s = \frac{a_t}{2}\Delta t^2 = \frac{a_t}{2}\left(\frac{\Delta v_k}{a_t}\right)^2 = \frac{\Delta v_k^2}{2a_t} = \frac{(15-0)^2}{2\cdot 2,5} = \underline{\underline{45\,\mathrm{m}}}$$

(3 p)



3. ábra. A gyorsulások kapcsolata a szabályos háromszöggé kiegészíthető 30°-os derékszögű háromszögben

Ad b) A centripetális gyorsulás pillanatnyi értékét megadó

$$a_{\mathrm{cp}} = \frac{v_k^2}{r}$$

összefüggés alapján a pillanatnyi értékek ismeretében az r sugár meghatározható :

$$r = \frac{v_k^2}{a_{\mathrm{cp}}}$$

A t_2 időpillanatbeli adatok alapján:

$$r = \frac{15^2}{4,25} = \underline{\underline{52,9\,\mathrm{m}}} \qquad \text{(4 p)}$$

Ad c) Ismét az

$$a_{\mathrm{cp}} = \frac{v_k^2}{r}$$

kifejezést használva az előbb kiszámolt r sugár segítségével a pillanatnyi sebességet kifejezhetjük:

$$v_k = \sqrt{a_{\mathrm{cp}}\cdot r} \qquad \text{(1 p)}$$

Az 3. ábrán szereplő nevezetes háromszöget használva a centripetális gyorsulás komponense a t_1 időpillanatban:

$$a_{\mathrm{cp}} = \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{2}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \qquad \text{(2 p)}$$

Így a sebesség ebben az időpillanatban:

$$v_k = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}5\cdot 52,9} = \underline{\underline{15,13\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}} \qquad \text{(4 p)}$$

4. Feladat:

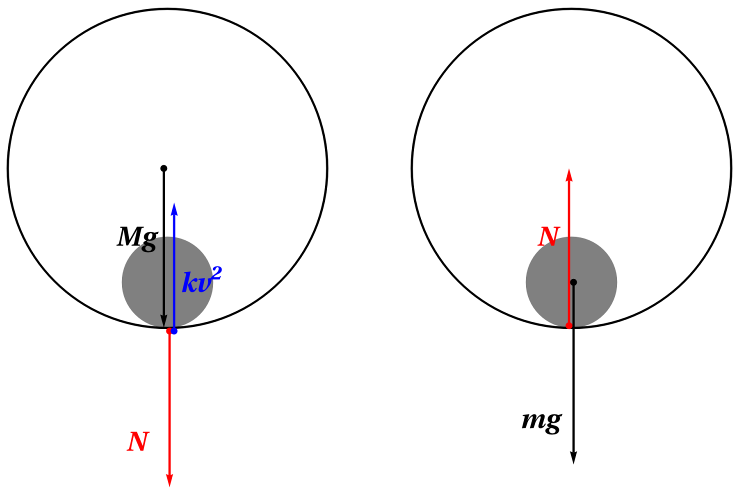
Egy $M = 0,8\,\mathrm{kg}$ tömegű belül üres merev falú gömbbe $m = 1,2\,\mathrm{kg}$ tömegű tömör kis golyót helyezünk. Ezt a szerkezetet a homogén nehézségi erőtérben nagy magasságból leejtjük. A közegellenállás arányos a sebesség négyzetével, az arányossági tényező $0,1\,\mathrm{Ns^2/m^2}$.

a) Ábrázoljuk a golyó által a nagy gömbre kifejtett erőt a sebesség függvényében!

b) Mekkora a fenti nyomóerő maximális értéke?

Megoldás:

Adatok: $M = 0,8\,\mathrm{kg}$; $m = 1,2\,\mathrm{kg}$; $k = 0,1\,\mathrm{Ns^2/m^2}$



4. ábra. A nagy gömbre (a) és a kis golyóra (b) ható erők.

Fölírva a mozgásegyenletet a nagy gömbre és a kis golyóra:

$$Ma = Mg + N - kv^2$$
$$ma = mg - N \qquad \text{(4 p)}$$

Itt már figyelembe vettük, hogy együtt mozognak azaz mindkét test gyorsulása lefelé mutató és a nagyságú.

A fönti egyenletrendszerből az ismeretlen a-t kiejtve a nyomóerő N nagysága kifejezhető:

$$\frac{1}{M}\left(Mg + N - kv^2\right) = \frac{1}{m}(mg - N)$$
$$\frac{1}{M}\left(N - kv^2\right) = -\frac{N}{m}$$
$$\left(1 + \frac{m}{M}\right)N = kv^2$$

Ahonnan a nyomóerő nagysága a sebesség függvényében:

$$N(v) = \frac{k}{\left(1 + \frac{m}{M}\right)}v^2 = \frac{0,1}{\left(1 + \frac{0,8}{1,2}\right)}v^2 = 0,06 \cdot v^2 \qquad \text{(6 p)}$$

De a sebesség nem nőhet a végtelenségig. Egy idő után a sebesség és az ebből adódó közegellenállási erő akkora lesz, hogy egyensúlyt tart a nehézségi és nyomó erővel és a gyorsulás nullává válik. Ennél a maximális sebességnél tehát a korábbi mozgásegyenletek szerint (4 p)

$$0 = Mg + N - kv_{\text{max}}^2$$
$$0 = mg - N.$$

Tehát

$$N(v_{\text{max}}) = mg = 1,2 \cdot 10 = \underline{\underline{12\,\text{N}}} \qquad \text{(1 p)}$$

Innen a lehetséges maximális sebességre:

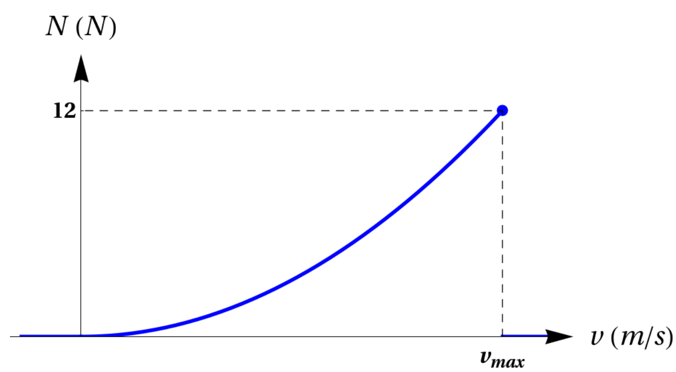
$$N(v_{\text{max}}) = 0,06 v_{\text{max}}^2$$

Ahonnan

$$v_{\text{max}} = \sqrt{\frac{12}{0,06}} = \sqrt{200} = 14,14\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \qquad \text{(2 p)}$$

Tehát az ábrázolandó függvény:

$$N(v) = \begin{cases} 0,06 \cdot v^2 & \text{ha } 0 \leq v \leq v_{\text{max}} = 14,14\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$



5. ábra. (3 p)

5. Feladat:

$10\,\mathrm{m}^3$-es tartályban normál állapotú levegő és 2 liter víz van. Mennyivel változik meg a nyomás, ha a víz elektromos úton hidrogénre és oxigénre bomlik, miközben a hőmérséklet nem változik?

Megoldás:

Adatok: $V = 10\,\mathrm{m}^3$; $V_{\text{víz}} = 2\,\mathrm{l} = 2\,\mathrm{dm}^3 = 2\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3$; Normál állapotú levegő: $p_0 = 10^5\,\mathrm{Pa}$; $T_0 = 273\,\mathrm{K}$.

A víz sűrűsége $\rho_{\text{víz}} = 1\,\mathrm{kg/dm}^3$. Így a tartályban lévő víz tömege: $m = 2\,\mathrm{kg}$.
A víz moláris tömege, mivel 2 hidrogén és egy oxigén atomból áll:

$$M = 2\cdot 1\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}} + 16\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}} = 18\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}} = 1,8\cdot 10^{-2}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{mol}} \qquad \text{(1 p)}$$

Tehát a tartályban lévő víz anyagmennyisége:

$$n = \frac{m}{M} = \frac{2000\,\mathrm{g}}{18\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}} = 111,\dot{1}\,\mathrm{mol} \qquad \text{(3 p)}$$

A vízbontás során

$$2H_2O \longrightarrow 2H_2 + O_2 \qquad \text{(2 p)}$$

Azaz $111,1\,\mathrm{mol}$ vízből keletkezik $111,1\,\mathrm{mol}$ H_2 és $\frac{111,1}{2}\,\mathrm{mol}$ O_2.
Tehát összességében

$$n_g = 1,5\cdot 111,1\,\mathrm{mol} \qquad \text{(3 p)}$$

kétatomos gázmolekula keletkezik. Ennyi gázmolekula jön még hozzá a levegőhöz (amely amúgy N_2 és O_2 molekulákból áll 99%-ban).

Az ideális gáz állapotegyenlete alapján a tartályban lévő levegő anyagmennyisége is meghatározható.

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = nR. \qquad \text{(1 p)}$$

Ahonnan

$$n_l = \frac{10^5\cdot(10 - 2\cdot 10^{-3})}{273\cdot 8,31} = 440,71\,\mathrm{mol} \qquad \text{(3 p)}$$

Így a levegő és a keletkezett gázok nyomása:

$$p = \frac{(n_l + n_g)RT}{V} = \frac{(440,71 + 1,5\cdot 111,1)\cdot 8,31\cdot 273}{10} = 1,378\cdot 10^5\,\mathrm{Pa} \qquad \text{(5 p)}$$

Tehát a nyomás növekedés:

$$\Delta p = \underline{\underline{0,378\cdot 10^5\,\mathrm{Pa}}} \qquad \text{(2 p)}$$

Megjegyzés: Persze a víz által kiszorított térfogat oly csekély az össztérfogathoz képest, hogy a levegő rendelkezésére álló térfogat lényegében nem változik. Így a nyomásváltozás kiszámításához elég nekünk

$$\Delta p = \frac{n_g RT}{V} = \frac{1,5\cdot 111,1\cdot 8,31\cdot 273}{10} = 0,378\cdot 10^5\,\mathrm{Pa}$$

6. Feladat:

A szénmonoxid fajhője állandó térfogaton $745\,\mathrm{J/(kgK)}$. Mennyi hő szükséges ahhoz, hogy $1\,\mathrm{kg}$ (normál állapotú) szénmonoxidot 5 fokkal fölmelegítsünk állandó nyomáson? Becsüljük meg, hogy mennyi munkát kell végeznünk ahhoz, hogy állandó hőmérsékleten visszaállítsuk az eredeti térfogatot!

Megoldás:

Adatok: $c_V = 745\,\mathrm{J/(kgK)}$; $m = 1\,\mathrm{kg}$; $\Delta T = 5\,\mathrm{K}$
Normál állapotú CO: $p_0 = 10^5\,\mathrm{Pa}$; $T_0 = 273\,\mathrm{K}$.
Moláris tömeg: $M = 12 + 16\,\mathrm{g/mol} = 28\,\mathrm{g/mol} = 0,028\,\mathrm{kg/mol}$ (1 p)

Melegítés állandó térfogaton: $V =$ állandó. Így nincs munkavégzés. Az első főtétel szerint a felvett hő megegyezik a belső energia változással.

$$\Delta E_b = Q_v$$

Melegítés állandó nyomáson: $p =$ állandó. Az első főtétel szerint a felvett hő megegyezik a belső energia változás és a gáz által végzett munka összegével .

$$\Delta E_b + p\Delta V = Q_p$$

Azaz az előzővel megegyező belsőenergia-változás mellé még ki kell számoljuk a gáz tágulási munkáját.

$$Q_p = c_v m\Delta T + p\Delta V \qquad \text{(3 p)}$$

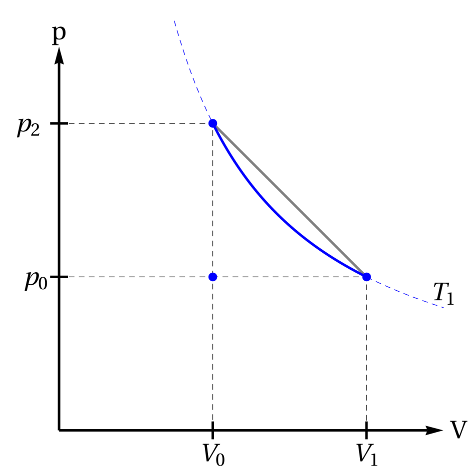
A gázok állapotegyenletéből pedig adódik, hogy

$$p\Delta V = nR\Delta T = \frac{m}{M}R\Delta T \qquad \text{(2 p)}$$

Így az állandó nyomáson közölt hő:

$$Q = c_v m\Delta T + \frac{m}{M}R\Delta T = 745\cdot 1\cdot 5 + \frac{1}{0,028}\cdot 8,31\cdot 5 = \underline{\underline{5209\,\mathrm{J}}} \qquad \text{(4 p)}$$

Állandó hőmérsékleten a végzett munkát szigorúan véve egy izoterma alatti terület kiszámításával lehet megkapni. De szerencsére a térfogat igen kicsit változik, így nyugodtan közelíthetjük a területet trapézzal. (2 p)



A szükséges térfogatok és nyomások kiszámítása:

$$p_0V_0 = \frac{m}{M}RT_0$$

alapján:

$$V_0 = \frac{m}{M}\frac{RT_0}{p_0} = \frac{1}{0,028}\frac{8,31\cdot 273}{10^5} = 0,810\,\mathrm{m}^3 \qquad \text{(2 p)}$$

Állandó nyomáson:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_0}{T_0} \qquad \Rightarrow \qquad V_1 = \frac{V_0\cdot T_1}{T_0} = \frac{0,810\cdot 278}{273} = 0,825\,\mathrm{m}^3 \qquad \text{(2 p)}$$

Állandó hőmérsékleten:

$$p_0 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_0 \qquad \Rightarrow \qquad p_2 = \frac{p_0 \cdot V_1}{V_0} = \frac{10^5 \cdot 0,825}{0,810} = 1,018 \cdot 10^5 \,\mathrm{Pa} \qquad \text{(2 p)}$$

Tehát látjuk, hogy a térfogat változása a térfogat nagyságához képest kicsi. Így trapézzal számolva a gázon végzendő munkát:

$$W \approx \Delta V \cdot \frac{p_0 + p_2}{2} = (0,825 - 0,810) \cdot \frac{(1 + 1,018) \cdot 10^5}{2} = \underline{\underline{1513,5\,\mathrm{J}}} \qquad \text{(2 p)}$$

(Végig kerekítés nélkül számolva: $W = 1497,5\,\mathrm{J}$)

(Integrálás alapján kapott görbe alatti terület formulával számolva: $W = \frac{m}{M}RT \cdot \ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right)$ egészre kerekítve ugyan ez az érték adódik.)

Másik megoldás az első kérdésre

Kihasználva, hogy a CO kétatomos molekula, és azt ideális gáznak tekintve.
A szabadsági fokok száma: $f = 5$

c_v **jelentése:** Melegítés állandó térfogaton: $V =$ állandó. Így nincs munkavégzés. Az első főtétel szerint a felvett hő megegyezik a belső energia változással.

$$\Delta E_b = Q$$

Azaz

$$\frac{f}{2} nR\Delta T = c_v m \Delta T$$

Ahonnan c_v ki is fejezhető:

$$c_v = \frac{f}{2}\frac{nR}{m} = \frac{f}{2}\frac{R}{M} = \frac{5}{2}\frac{8,31}{0,028} = 742\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{K}}$$

Ez jó közelítéssel annyi mint a megadott érték.

c_p **jelentése:** Melegítés állandó nyomáson: $p =$ állandó. Az első főtétel szerint a felvett hő megegyezik a belső energia változás és a gáz által végzett munka összegével .

$$\Delta E_b + p\Delta V = Q$$

Azaz

$$\frac{f}{2} nR\Delta T + p\Delta V = c_p m \Delta T$$

A gázok állapotegyenletéből pedig adódik, hogy

$$p\Delta V = nR\Delta T$$

Így c_p is kifejezhető a c_v-hez hasonló formulával:

$$c_p = \frac{f+2}{2}\frac{nR}{m} = \frac{f+2}{2}\frac{R}{M} = \frac{7}{2}\frac{8,31}{0,028} = 1039\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{K}}$$

Így az állandó nyomáson közölt hő:

$$Q = c_p m \Delta T = 1039 \cdot 1 \cdot 5 = \underline{\underline{5194\,\mathrm{J}}}$$

Vagy kihasználva, hogy

$$c_p = \frac{f+2}{f} c_v$$

$$Q = c_p m \Delta T = \frac{f+2}{f} c_v m \Delta T = \frac{7}{5} \cdot 745 \cdot 1 \cdot 5 = \underline{\underline{5215\,\mathrm{J}}}$$

7. Feladat:

Egy vákuumcsőben 10^{-5} Pa nyomású, 400 K hőmérsékletű oxigéngáz van. Becsüljük meg, hogy mennyi idő alatt fedi be oxigénréteg a behelyezett fémfelületet, feltéve hogy minden a felületnek ütköző oxigén molekula a felületen marad! Tekintsük a molekulákat $3 \cdot 10^{-8}$ cm sugarú gömböknek.

Megoldás:

Adatok: $p = 10^{-5}\,\mathrm{Pa}$; $T = 400\,\mathrm{K}$; $r = 3 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{cm} = 3 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}$.

Legyen a gáz molekulák átlagos haladási sebessége v. Továbbá a gáz koncentrációja $\mu = \frac{N}{V}$

Ekkor Δt időtartamot véve egy A felület előtt az $Av\Delta t$ térfogatban $Av\Delta t\mu$ darab részecske van.

Ezen részecskéknek – mivel a 6 lehetséges irány (le-fel, jobbra-balra, előre-hátra) egyenrangú átlagban – 1/6-od része halad az A felület irányába. Tehát Δt idő alatt az A felületnek ütköző részecskék száma

$$N_{\text{utk}} = \frac{1}{6} A v \mu \Delta t. \qquad \text{(5 p)}$$

Ezek mind a felületen maradnak és egyenként $r^2\pi$ felületet képviselnek. Így az összes befedett felület Δt idő alatt

$$N_{\text{utk}} \cdot (r^2\pi) = \frac{1}{6} A v \mu \Delta t (r^2\pi).$$

Mi arra vagyunk kíváncsiak, hogy mennyi idő alatt fedi be az oxigén réteg az A felületet.

$$A = \frac{1}{6} A v \mu \Delta t (r^2\pi)$$

alapján erre adódik, hogy

$$\Delta t = \frac{6}{v\mu(r^2\pi)}. \qquad \text{(4 p)}$$

Tehát meg kell határozzuk a gáz részecskék koncentrációját, illetve az átlagos sebességüket.

A koncentráció könnyen kiszámítható a gázok állapotegyenlete alapján.

$$pV = NkT$$

alapján a koncentráció:

$$\mu = \frac{N}{V} = \frac{p}{kT} = \frac{10^{-5}}{1,385 \cdot 10^{-23} \cdot 400} = 1,805 \cdot 10^{15}\,\frac{1}{\mathrm{m}} \qquad \text{(2 p)}$$

A gázrészecskék átlagos sebességét egyrészt meghatározhatjuk a korábban már levezetett egy A felületnek Δt idő alatt nekiütköző részecskeszámból, hisz ezen részecskék az ütközés során $2m_0v$ impulzust adnak át a falnak. Így a falra ható erő

$$F = \frac{N_{utk} \cdot (2m_0v)}{\Delta t} = \frac{1}{6}\frac{Av\mu\Delta t \cdot (2m_0v)}{\Delta t} = \frac{1}{3}Av^2\mu m_0$$

Vagyis a falat érő nyomás

$$p = \frac{1}{3}v^2\mu m_0,$$

ahonnan a sebesség

$$v = \sqrt{\frac{3p}{\mu m_0}} = \sqrt{\frac{3pV}{Nm_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8,31 \cdot 400}{0,032}} = 558,2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad \text{(6 p)}$$

De ha az ekvipartíció tétele felől közelítünk akkor is ezt kapjuk, ugyanis a gázrészecskék kinetikus energiája meggyezik a 3 transzlációs szabadsági fokra jutó belső energiával:

$$\frac{1}{2}nMv^2 = \frac{3}{2}nRT$$

Ahonnan az előbbi formula adódik.

Behelyettesítve a fönti adatokat a keresett időre

$$\Delta t = \frac{6}{558,2 \cdot 1,805 \cdot 10^{15} \cdot (3 \cdot 10^{-10})^2 \cdot \pi} = \underline{\underline{21,06\,\mathrm{s}}} \qquad \text{(3 p)}$$

Megjegyzés: Ha az $1/6$ helyett más aránnyal jól számol, akkor 3 pont levonást alkalmazzunk.

8. Feladat:

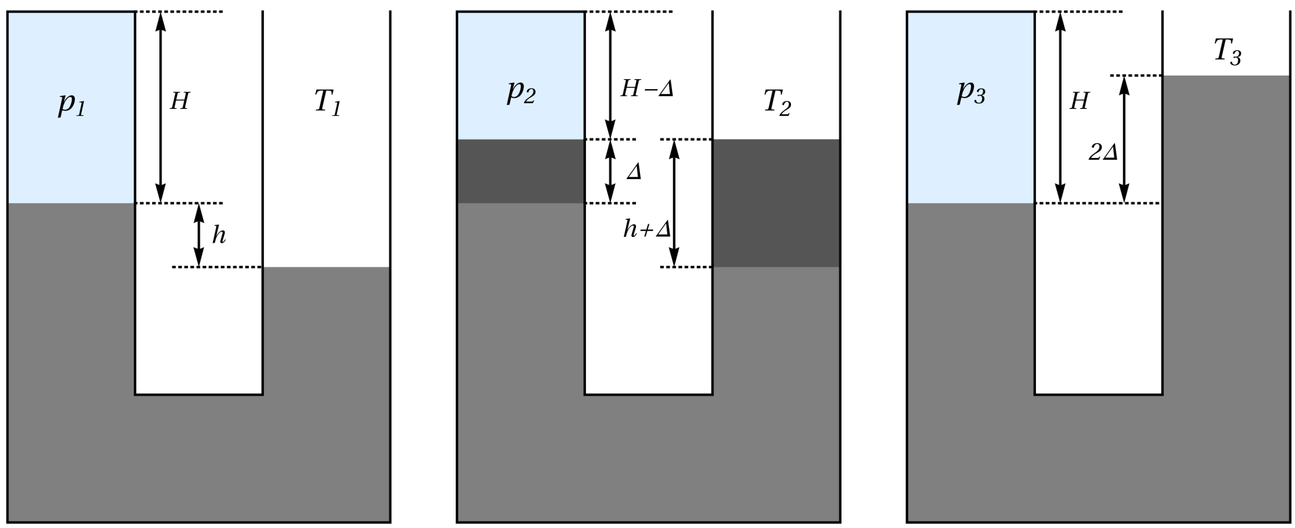
Az egyenletes belső keresztmetszetű, U alakú cső zárt tetejű szárában $40\,\mathrm{cm}$ hosszúságú $20°\,\mathrm{C}$ hőmérsékletű légoszlopot zárunk el higannyal úgy, hogy a nyitott végű szárban a higany szintje $6\,\mathrm{cm}$-rel alacsonyabb mint a másikban. A légköri nyomás állandóan $76\,\mathrm{Hgcm}$.

a) Milyen hosszú lesz a légoszlop, ha a nyitott szárba addig töltünk be higanyt, amíg a higanyszintek ki nem egyenlítődnek, miközben a bezárt levegő $25°\,\mathrm{C}$-ra melegszik.

b) Mekkorára növeljük ezután a légoszlop hőmérsékletét, hogy a hossza újra $40\,\mathrm{cm}$ legyen?

Megoldás:

Adatok: $H = 40\,\mathrm{cm}$; $T_1 = 20°\,\mathrm{C} = 293\,\mathrm{K}$; $T_2 = 25°\,\mathrm{C} = 298\,\mathrm{K}$; $h = 6\,\mathrm{cm}$; $p_k = 76\,\mathrm{Hgcm}$.



(a) kezdetben (1 p) (b) Hg beöntése és melegítés (1 p) (c) melegítés (1 p)

Az egyszerűbb számítások miatt itt megmaradunk a nem SI egységeknél.
A bezárt levegő nyomása kezdetben:

$$p_1 = p_k - \rho_{Hg} g h = 76\,\mathrm{Hgcm} - 6\,\mathrm{Hgcm} = 70\,\mathrm{Hgcm} \qquad (3\text{ p})$$

A higany beöntése után a bezárt levegő nyomása megegyezik a légköri nyomással:

$$p_2 = p_k = 76\,\mathrm{Hgcm} \qquad (2\text{ p})$$

A gáztörvény alapján:

$$\frac{p_1 \cdot H \cdot A}{T_1} = \frac{p_2 \cdot (H - \Delta) \cdot A}{T_2} \qquad (2\text{ p})$$

Ahonnan

$$\Delta = H\left(1 - \frac{p_1}{p_2} \cdot \frac{T_2}{T_1}\right) = 40\,\mathrm{cm}\left(1 - \frac{70\,\mathrm{Hgcm}}{76\,\mathrm{Hgcm}} \cdot \frac{298\,\mathrm{K}}{293\,\mathrm{K}}\right) = 2,53\,\mathrm{cm} \qquad (3\text{ p})$$

Tehát a légoszlop hossza

$$(H - \Delta) = 40\,\mathrm{cm} - 2,53\,\mathrm{cm} = \underline{\underline{37,47\,\mathrm{cm}}}$$

Ezek után ha szeretnénk, hogy a légoszlop ismét H hosszú legyen ki kell számolni, hogy mekkora légnyomással érhető ez el:

$$p_3 = p_k + \rho_{Hg} g (2\Delta) = 76\,\mathrm{Hgcm} + 2 \cdot 2,53\,\mathrm{Hgcm} = 81,06\,\mathrm{Hgcm} \qquad (2\text{ p})$$

Ismét a gáztörvény alapján a kiindulási helyzethez viszonyítva:

$$\frac{p_1 \cdot H \cdot A}{T_1} = \frac{p_3 \cdot H \cdot A}{T_3} \qquad (2\text{ p})$$

Ahonnan

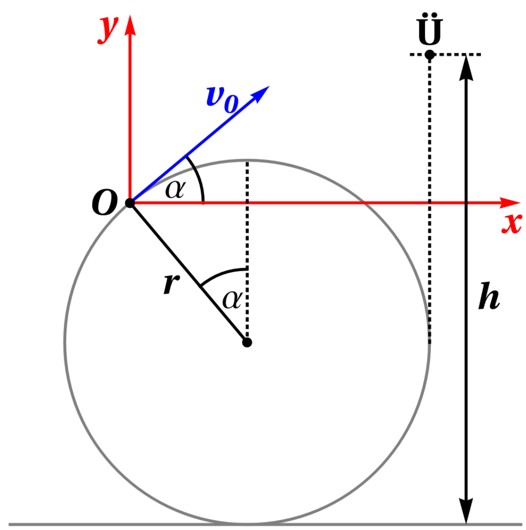
$$T_3 = \frac{p_3}{p_1} \cdot T_1 = \frac{81,06\,\mathrm{Hgcm}}{70\,\mathrm{Hgcm}} \cdot 293\,\mathrm{K} = \underline{\underline{339,3\,\mathrm{K} = 66,3^\circ\,\mathrm{C}}} \qquad (3\text{ p})$$

9. Feladat:

Vizes úton kerékpározunk. A kerékpárunkon nincs hátsó sárhányó. Mekkora maximális sebességgel "tekerhetünk", ha nem szeretnénk, hogy a kerékről fölcsapó víz elérje a hátunkat? Tegyük fel, hogy a kerék sugara $38\,\mathrm{cm}$ és az ülés a hátsó kerék tengelye előtt $38\,\mathrm{cm}$-rel $98\,\mathrm{cm}$ magasságban van. (Útmutató: Függvényelemzésekhez készítsen értéktáblázatot. A sebesség korlátot elegendő $0,3\,\mathrm{m/s}$ pontossággal megbecsülni.)

Megoldás:

Adatok: $r = 38\,\mathrm{cm}$; $h = 98\,\mathrm{cm}$



6. ábra. (2 p)

Tiszta gördülés esetét nézzük, a vízcseppek kerületi sebessége megegyezik a kerékpár sebességével.

A koordináta-rendszert a kerékpár azon pontjához rögzítjük ahol a vízcsepp leválik (mivel azt az esetet vizsgáljuk amikor a kerékpár egyenletes sebességgel halad ez is inercia rendszer lesz.)

$$x(t) = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t$$
$$y(t) = v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t - \frac{g}{2}t^2 \qquad \text{(2 p)}$$

Azt kell megállapítanunk, hogy hol van a vízcsepp $x = r + r\sin\alpha$ vízszintes út megtétele után.

Az ehhez szükséges idő az $x(t)$ függvénybe behelyettesítve :

$$r + r\sin\alpha = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t_0$$
$$t_0 = r \cdot \frac{1+\sin\alpha}{v_0 \cdot \cos\alpha} \qquad \text{(1 p)}$$

Ezt az időpontot kell beírnunk az $y(t)$ kifejezésébe, és vizsgálnunk, hogy mikor lesz kisebb mint $y_{\max} = h - r - r\cos\alpha$. (2 p)

$$y_{\max} \geq y(t_0)$$

$$y_{\text{max}} \geq v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t_0 - \frac{g}{2} t_0^2 \qquad \text{(2 p)}$$

$$h - r - r\cos\alpha \geq v_0 \cdot \sin\alpha \cdot r \cdot \frac{1+\sin\alpha}{v_0 \cdot \cos\alpha} - \frac{g}{2}\left(r \cdot \frac{1+\sin\alpha}{v_0 \cdot \cos\alpha}\right)^2$$

Bevezetve a $\gamma = \frac{h}{r} = \frac{98}{38}$-et és elvégezve a lehetséges egyszerűsítéseket

$$\gamma - 1 - \cos\alpha \geq \frac{\sin\alpha \cdot (1+\sin\alpha)}{\cos\alpha} - \frac{g}{2} \cdot r \cdot \frac{(1+\sin\alpha)^2}{v_0^2 \cdot \cos^2\alpha}$$

$$\frac{g \cdot r}{2} \cdot \frac{(1+\sin\alpha)^2}{v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} \geq \frac{\sin\alpha \cdot (1+\sin\alpha)}{\cos\alpha} - \gamma + 1 + \cos\alpha$$

$$\frac{g \cdot r}{2} \cdot \frac{(1+\sin\alpha)^2}{v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} \geq \frac{\sin\alpha + \sin^2\alpha + (1-\gamma)\cos\alpha + \cos^2\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\frac{g \cdot r}{2} \cdot \frac{(1+\sin\alpha)^2}{v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} \geq \frac{1 + \sin\alpha + (1-\gamma)\cos\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\frac{g \cdot r}{2} \cdot \frac{(1+\sin\alpha)^2}{v_0^2 \cdot \cos\alpha} \geq 1 + \sin\alpha + (1-\gamma)\cos\alpha$$

$$\frac{g \cdot r}{2} \cdot \frac{(1+\sin\alpha)^2}{\cos\alpha \cdot [1 + \sin\alpha + (1-\gamma)\cos\alpha]} \geq v_0^2$$

Tehát

$$v_0^2 \leq \frac{g \cdot r}{2} \cdot f(\alpha) \qquad \text{ahol} \qquad f(\alpha) = \frac{(1+\sin\alpha)^2}{\cos\alpha \cdot [1 + \sin\alpha + (1-\gamma)\cos\alpha]} \qquad \text{(6 p)}$$

A fenti $f(\alpha)$ függvénynek kellene megkeresni a minimumát. mert ha v_0^2 még annál is kisebb akkor biztos nem érnek el a vízcseppek az ülés fölé a hátunkra.

α	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°
$f(\alpha)$	19,59	10,79	8,13	6,98	6,46	6,32	6,47	6,94	7,86

(3 p)

$$v_0 \leq \sqrt{\frac{g \cdot r}{2} \cdot f(\alpha)_{\text{min}}} = \sqrt{1,9 \cdot 6,46} = \underline{\underline{3,46\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}} \qquad \text{(2 p)}$$

Avagy eleve v_0-at számolva:

α	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°
v_0	6,10	4,53	3,93	3,64	3,50	3,46	3,50	3,63	3,86

10. Feladat:

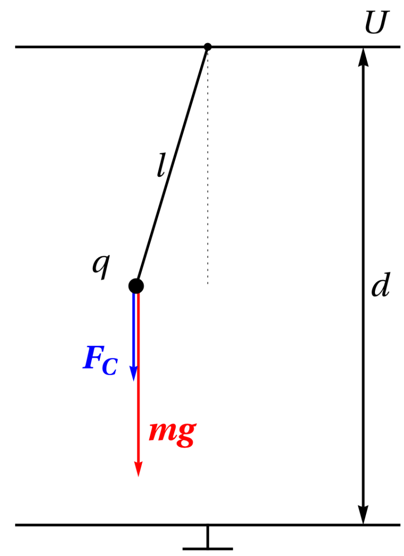
Két, egymás felett $20\,\mathrm{cm}$ távolságban levő vízszintes helyzetű nagy kiterjedésű fémlap közül az alsót földeljük, a felsőt pedig $+9000\,\mathrm{V}$ potenciálra töltjük. A felső lapra $10\,\mathrm{cm}$ hosszú selyemszálon $0,1\,\mathrm{g}$ tömegű és $10^{-8}\,\mathrm{C}$ töltésű golyót függesztünk fel.

a) Mennyi lesz ennek az ingának a lengésideje kis kitérés esetén?

b) Milyen nagynak kell lennie a felső lap potenciáljának ahhoz, hogy a lengésidő kétszer nagyobb legyen a nehézségi térben, mint elektromos és nehézségi térben együttesen?

Megoldás:

Adatok: $d = 20\,\mathrm{cm} = 0,2\,\mathrm{m}$; $U = 9000\,\mathrm{V}$; $l = 10\,\mathrm{cm} = 0,1\,\mathrm{m}$; $m = 0,1\,\mathrm{g} = 10^{-4}\,\mathrm{kg}$; $q = 10^{-8}\,\mathrm{C}$



Ad a): A nehézségi erő nagysága:

$$mg = 10^{-4} \cdot 10 = 10^{-3}\,\mathrm{N}$$

Az elektromos mező által kifejtett erő nagysága:

$$E = \frac{U}{d} = \frac{9000}{0,2} = 45000\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} \qquad (1\ \mathrm{p})$$

$$F_c = E \cdot q = 45000 \cdot 10^{-8} = 0,45 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{N} \qquad (2\ \mathrm{p})$$

Ez a két erő egymással összemérhető nagyságú, így mindkettőt figyelembe kell venni az ingamozgás kialakulásakor.

Megjegyzés: Mivel az egyik lemez földelt fölmerülhetne, hogy figyelembe kell vennünk a „tükörtöltés” hatását is. De azt nyugodtan elhanyagolhatjuk mert az erőhatás a fönti adatokkal 2 nagyságrenddel kisebb, mint a többi föllépő erő.

$$F_T = k\frac{q^2}{(2(d-l))^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{10^{-16}}{(2 \cdot 0,1)^2} = 2,25 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{N} << 10^{-3}\,\mathrm{N}$$

A fémlapok közt fölépülő elektromos mező a golyó bármely helyzetében ugyanaz, így elképzelhetjük úgy a problémát, hogy a nehézségi erőteret módosítottuk az elektromos mezővel.

A golyó, ha a kötél nem tartaná a helyén a gyorsulással gyorsulna. A mozgásegyenlet alapján

$$ma = mg + F_c$$

ahonnan a gyorsulás értéke

$$a = g + \frac{F_c}{m} = 10 + \frac{4,5 \cdot 10^{-4}}{10^{-4}} = 14,4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \qquad (3\ \mathrm{p})$$

Tehát az inga kis kitérésekre a nehézségi erőtérben érvényes formulájában:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \text{(1 p)}$$

le kell cseréljük a g nehézségi gyorsulást a golyó által valójában érzékelt a gyorsulással, így

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{l}{a}}. \qquad \text{(2 p)}$$

Behelyettesítve

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{0,1}{14,4}} = \underline{\underline{0,52\,\mathrm{s}}}. \qquad \text{(1 p)}$$

Ad b): A fönti formulák alapján

$$\frac{T}{T'} = \sqrt{\frac{a}{g}} \qquad \text{(3 p)}$$

Azaz

$$2 = \sqrt{\frac{a}{g}}$$

ahonnan

$$a = 4g = 40\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}. \qquad \text{(2 p)}$$

Innen a töltésre ható erő:

$$F_c = m \cdot (a' - g) = 3mg$$

Azaz

$$\frac{Uq}{d} = 3mg \qquad \Rightarrow \qquad U = \frac{3mgd}{q} = \frac{3 \cdot 10^{-4} \cdot 10 \cdot 0,2}{10^{-8}} = \underline{\underline{60000\,\mathrm{V}}} \qquad \text{(5 p)}$$

11. Feladat:

Egy teljesítmény-ellenállás (hűtőbordával ellátott ellenállás) adatai a következők: ellenállás üzemi hőmérsékleten: $5100\,\Omega$, hőkapacitás: $2,2\,\mathrm{J/K}$, hőellenállás a környezet felé: $6,5^\circ\,\mathrm{C/W}$, effektív teljesítmény "hidegen" (25° C-on): $14\,\mathrm{W}$. A környezet hőmérséklete $25^\circ\,\mathrm{C}$. Az ellenállásra $230\,\mathrm{V}$ effektív feszültségű $50\,\mathrm{Hz}$-es szinuszos váltakozó áramot kapcsolunk.

a) Mekkora az üzemi hőmérséklet?

b) Mekkora az ellenállás hőfoktényezője?

Útmutató: A hőellenállás a környezet felé azt fejezi ki, hogy a hőleadás teljesítménye a környezet felé arányos az aktuális hőmérséklet-különbséggel, az arányossági tényező a hőellenállás reciproka.

Megoldás:

Adatok: $R_\infty = 5100\,\Omega$; $C = 2,2\,\mathrm{J/K}$; $R_h = 6,5^\circ\,\mathrm{C/W}$; $P_0 = 14\,\mathrm{W}$; $T_0 = 25^\circ\,\mathrm{C}$; $U_{eff} = 230\,\mathrm{V}$; $f = 50\,\mathrm{Hz}$

Ad a) A hőátadás jellemzően sokkal nagyobb időskálán játszódik le mint a szinuszos váltóáram periódusideje

$$T = \frac{1}{f} = 0,02\,\mathrm{s},$$

így a feszültség és az áram időbeli változásától nyugodtan eltekinthetünk és számolhatunk effektív értékekkel.

Melegítés teljesítménye:

$$P_\mathrm{m} = U_\mathrm{eff} \cdot I_\mathrm{eff} = \frac{U_\mathrm{eff}^2}{R(\Delta T)} \qquad \text{(2 p)}$$

Ahol $R(\Delta T)$ a adott hőmérséklet-változáshoz tartozó ellenállás. Föltételezve, hogy az ellenállás hőmérsékletfüggése lineáris:

$$R(\Delta T) = R_0(1 + \alpha \Delta T), \qquad \text{(2 p)}$$

ahol α az ellenállás hőfoktényezője.

A hőátadás (lehűlés) teljesítménye a megadott definíció alapján :

$$P_\mathrm{h} = \frac{1}{R_h} \cdot \Delta T \qquad \text{(1 p)}$$

Tehát mindkét teljesítmény függ az addigi hőmérséklet-változás aktuális értékétől, ami viszont változik az időben!!!

Viszont amikor a hőmérséklet állandósul a melegítés teljesítménye meg kell egyezzen a hűlés teljesítményével. Az ehhez tartozó hőmérséklet-változást jelölje: ΔT_∞.

$$\frac{1}{R_h} \cdot \Delta T_\infty = \frac{U_\mathrm{eff}^2}{R(\Delta T_\infty)} \qquad \text{(5 p)}$$

Itt kihasználva, hogy $R(\Delta T_\infty) = R_\infty$ kapjuk, hogy

$$\Delta T_\infty = \frac{R_h \cdot U_\mathrm{eff}^2}{R_\infty} = \frac{6,5 \cdot 230^2}{5100} = 67,4\,^\circ\mathrm{C} \qquad \text{(2 p)}$$

Vagyis az üzemi hőmérséklet:

$$T_\infty = T_0 + \Delta T_\infty = 25 + 67,4 = \underline{\underline{92,4\,^\circ\mathrm{C}}}. \qquad \text{(1 p)}$$

Ad b) A hőfoktényező meghatározásához, egyrészt szükséges a „hideg” teljesítmény, másrészt pedig az ellenállás hőmérsékletfüggése:

$$P_0 = \frac{U_\mathrm{eff}^2}{R_0} \qquad R_\infty = R_0(1 + \alpha \Delta T_\infty).$$

Az első egyenletből R_0-at kifejezve és azt beírva a második egyenletbe:

$$R_\infty = \frac{U_\mathrm{eff}^2}{P_0}(1 + \alpha \Delta T_\infty). \qquad \text{(4 p)}$$

Ahonnan az α hőfoktényező kifejezhető:

$$\alpha = \frac{1}{\Delta T_\infty}\left[\frac{R_\infty \cdot P_0}{U_\mathrm{eff}^2} - 1\right] = \frac{1}{67,4}\left[\frac{5100 \cdot 14}{230^2} - 1\right] = \underline{\underline{0,0052\,\frac{1}{^\circ\mathrm{C}}}}. \qquad \text{(3 p)}$$

12. Feladat:

A CERN Nagy Hadronütköztető nevű berendezése (az ún. LHC) egy $26659\,\mathrm{m}$ kerületű nagyjából kör alakú gyorsító, amelyben protonok futnak körbe egy $28\,\mathrm{mm}$ sugarú vákuumcső közepén közel fénysebességgel. A relativitáselméletből ismert, az energia és "tömeg" közötti $E = m \cdot c^2$ kapcsolat. Az LHC-ben a protonokat $7\,\mathrm{TeV}$ energiára sikerült felgyorsítani.

a) Hányszor nagyobb a felgyorsított proton "tömege" a proton nyugalmi tömegénél?

b) Ezzel a „tömeggel” számolva mekkora a mágneses indukció nagysága, amely a szükséges centripetális gyorsulást biztosítani tudja?

c) A proton a súlya miatt leesne a vákuumcső aljára, ha ezt nem akadályoznák meg másfajta mágnesekkel. Hány kört tenne meg a proton, amíg elérné a cső alját, ha nem akadályoznák meg ezt és nem ütközne közben más protonnal?

d) A protonok csomókban haladnak a gyorsítóban, egy csomóban $1,15\cdot 10^{11}$ darab proton van és 2808 csomó fut a körben. Mekkora a protonok által vitt áramerősség?

e) Az áramerősséget, amely a gyorsító működésének az egyik legfontosabb paramétere, az általa keltett mágneses mezővel mérik. Mekkora ennek a mezőnek a mágneses indukciója a nyaláb középpontjától $15\,\mathrm{cm}$ távolságban?

Megoldás:

Adatok: $K = 26659\,\mathrm{m}$; $r = 28\,\mathrm{mm} = 0,028\,\mathrm{m}$; $E = 7\,\mathrm{TeV}$; $N_p = 1,15 \cdot 10^{11}$; $N_{cs} = 2808$; $d = 15\,\mathrm{cm}$

A fénysebesség: $c = 3 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
Az elektron töltés nagysága: $q_e = 1,6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$
A proton nyugalmi tömege $m_0 = 1,67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
Az adatok alapján a gyorsító körének sugara: $R = K/(2\pi) = 26659/(2\pi) = 4242,91\,\mathrm{m}$
A tera prefixum jelentése: 10^{12}
Az elektronvolt átváltása: $E = 7\,\mathrm{TeV} = 7 \cdot 10^{12}\,\mathrm{eV} = 7 \cdot 10^{12} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J} = 1,12 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{J}$

Ad a) Az energiát megadó $E = m \cdot c^2$ összefüggés alapján:

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{1,12 \cdot 10^{-6}}{(3 \cdot 10^8)^2} = 1,24 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{kg}$$

Ez a nyugalmi tömeghez képest:

$$\frac{m}{m_0} = \frac{1,24 \cdot 10^{-23}}{1,67 \cdot 10^{-27}} = \underline{\underline{7452}}.$$

(4 p)

Ad b) A mozgó töltésre ható erő a mágneses mezőben, ha a sebesség merőleges a mágneses erővonalakra: $q \cdot B \cdot v$.

Így

$$q \cdot B \cdot c = m\frac{c^2}{R},$$

ahonnan a B kifejezhető:

$$B = \frac{mc}{qR} = \frac{1,24 \cdot 10^{-23} \cdot 3 \cdot 10^8}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 4242,91} = \underline{\underline{5,48\,\mathrm{T}}}$$

(4 p)

Ad c) Kizárólag nehézségi erőtérben egy ferde hajítással esne le a proton középről a cső aljára.

A hajítást leíró egyenletek:

$$x(t) = c \cdot t$$
$$y(t) = r - \frac{g}{2}t^2$$

Ezek alapján a cső aljának elérésekor:

$$0 = r - \frac{g}{2}t_e^2,$$

ahonnan az esés t_e idejére

$$t_e = \sqrt{\frac{2r}{g}}.$$

Ezek alapján a vízszintesen megtett út:

$$x(t_e) = c \cdot t_e = c \cdot \sqrt{\frac{2r}{g}}.$$

Ezt a kerülethez viszonyítva kapjuk a megtett körök számát:

$$N = \frac{c}{K} \cdot \sqrt{\frac{2r}{g}} = \frac{3 \cdot 10^8}{26659} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 0,028}{10}} = \underline{\underline{842}}$$

(4 p)

Ad d) Az áramerősség definíció szerint egy adott keresztmetszeten az időegység alatt áthaladt töltés mennyisége. Itt egy periódusidő alatt a körben lévő összes proton elhalad, így:

$$I = \frac{N_{cs} \cdot N_p \cdot q}{T} = \frac{N_{cs} \cdot N_p \cdot q}{K/c} = \frac{N_{cs} \cdot N_p \cdot q \cdot c}{K} = \frac{2808 \cdot 1,15 \cdot 10^{11} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 3 \cdot 10^8}{26659} = \underline{\underline{0,58\,\mathrm{A}}}$$

(4 p)

Ad e) Hosszú egyenes vezetőnek tekinthetem, mivel $d << R$. Így

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{d} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} \cdot \frac{0,58}{0,15} = \underline{\underline{7,73 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{T}}}$$

(4 p)

13. Feladat:

Egyenletes keresztmetszetű sárgarézhuzalból $r = 10\,\mathrm{cm}$ sugarú körvezetőt készítünk, amelyet egy szintén r sugarú, súlytalannak tekinthető korong peremére erősítünk. A korongot egy középpontján átmenő, a korong síkjára merőleges, függőleges, jól csapágyazott tengelyhez rögzítjük, majd ezt a szerkezetet a tengellyel párhuzamos, egyenletesen eltűnő, kezdetben ($t = 0$ időpillanatban) $B_0 = 0,01\,\mathrm{T}$ nagyságú mágneses mezőbe helyezzük. A mágneses mező változását a mező eltűnéséig a $B = B_0 - \beta \cdot t$ függvény írja le. A korong forgásba jön. Mekkora lesz a szögsebessége?

Megoldás:

Adatok: $r = 10\,\mathrm{cm}$; $B_0 = 0,01\,\mathrm{T}$;

A drót anyagának fajlagos ellenállása: $\rho_{\mathrm{el}} = 7,3 \cdot 10^{-8}\,\Omega\mathrm{m}$

A drót anyagának sűrűsége: $\rho_{\mathrm{m}} = 8290\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$

A fokozatosan eltűnő mágneses mező hatására a vezető körben feszültség indukálódik, ami áramot indít el. Az indukálódott feszültség nagysága a fluxusváltozásból kiszámítható.

$$\frac{\Delta\Phi(t)}{\Delta t} = -U_i$$

A vezetőkör keresztmetszetének fluxusa az időben:

$$\Phi(t) = (B_1 - \beta t) \cdot (r^2\pi)$$

Így az indukálódott feszültség:

$$U_i = \beta \cdot (r^2\pi) \qquad \text{(2 p)}$$

A vezetékben felépülő elektromos tér nagysága pedig:

$$E = \frac{U_i}{2r\pi} = \frac{\beta \cdot (r^2\pi)}{2r\pi} = \frac{\beta \cdot r}{2} \qquad \text{(3 p)}$$

A vezetőkör ellenállása a fajlagos ellenállás és a geometriai adatok alapján (A a vezeték keresztmetszete):

$$R = \rho_{\mathrm{el}} \frac{2r\pi}{A} \qquad \text{(1 p)}$$

A körben folyó áram:

$$I = \frac{U_i}{R} = \frac{\beta \cdot (r^2\pi)}{\rho_{\mathrm{el}} \frac{2r\pi}{A}} = \frac{\beta \cdot rA}{2\rho_{\mathrm{el}}} \qquad \text{(2 p)}$$

A mágneses mező eltűnéséhez szükséges idő:

$$t_0 = \frac{B_0}{\beta}. \qquad \text{(1 p)}$$

t_0 idő alatt a vezető egy adott keresztmetszetén átáramlott töltés:

$$Q = I \cdot t_0 = \frac{\beta \cdot rA \cdot t_0}{2\rho_{\mathrm{el}}} = \frac{B_0 \cdot rA}{2\rho_{\mathrm{el}}} \qquad \text{(2 p)}$$

A vezetőben kialakuló E mező gyorsítja az elektronokat, amelyek „ütköznek” a rács atomjaival: impulzust adnak át a vezetéknek. A QE gyorsító erő mellett így fellép egy vele egyenlő nagyságú súrlódási erő (hiszen az ütközések és a gyorsítások eredményeképp az elektronok egy átlagos állandó v_{drift} sebességgel haladnak):

$$F_s = QE \qquad \text{(2 p)}$$

A vezetőkör teljes lendületváltozása az eltelt t_0 idő alatt:

$$m\Delta v = F_s \cdot t_0$$

Mivel a kör kezdetben nyugalomban volt:

$$v = \frac{F_s \cdot t_0}{m} = \frac{QE \cdot t_0}{m} \qquad \text{(3 p)}$$

A tömeget ki tudjuk fejezni a vezető anyag sűrűségével:

$$m = \rho_m \cdot A \cdot (2r\pi)$$

$$v = \frac{\left[\frac{B_0 \cdot rA}{2\rho_{\text{el}}}\right] \cdot \left[\frac{\beta \cdot r}{2}\right] \cdot \frac{B_0}{\beta}}{\rho_m \cdot A \cdot (2r\pi)} = \frac{B_0^2 \cdot r}{8\pi \cdot \rho_{\text{el}} \cdot \rho_m}$$

Innen a szögsebességre:

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{B_0^2}{8\pi \cdot \rho_{\text{el}} \cdot \rho_m} \qquad \text{(3 p)}$$

$$\omega = \frac{0,01^2}{8\pi \cdot 7,3 \cdot 10^{-8} \cdot 8290} = \underline{\underline{0,0066\,\frac{1}{\text{s}}}} \qquad \text{(1 p)}$$